第 2 章　导数与微分

本章将介绍微分学的两个基本概念——导数与微分，并介绍它们的计算方法.

2.1　导数的概念

2.1.1　变化率问题举例

为了说明微分学的基本概念——导数，先讨论物理学中的速度问题，从而引入导数的定义.

由中学物理知识知道：作自由落体运动的物体的位移 s 与其时间 t 的函数关系是：$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$，自由落体运动不是匀速运动，所以物体在自由落体运动过程中的速度需要按照不同时刻来考虑，那么，如何求得物体在自由落体运动的 $t=t_0$ 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 呢？

1. **从物体的平均速度入手**

取物体移动时间 t 从 t_0 变化到 $t_0+\Delta t$，则在 Δt 这个时间段内物体的位移为

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g(t_0)^2=gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g\Delta t^2 . \tag{1}$$

物体在 Δt 这个时间段内的平均速度为

$$\overline{v}_{[t_0,t_0+\Delta t]}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t . \tag{2}$$

2. **得到瞬时速度**

由（2）易见 Δt 愈小，Δt 时间段内的平均速度 $\overline{v}$ 的值就愈接近 t_0 时刻的速度，因此，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\overline{v}$ 的极限便自然定义为物体在 t_0 时刻的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=gt_0 .$$

由此可见，物体在 t_0 时刻的瞬时速度是函数的增量 Δs 与自变量的增量 Δt 的比值，当 $\Delta t\to 0$ 时的极限. 推广到一般，可以归结为一个函数 $y=f(x)$ 的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 之比，当 $\Delta x\to 0$ 时的极限. 这种类型的极限称其为导数.

2.1.2　导数的定义及几何意义

1. **导数的定义**

从上面所讨论的问题看出，非匀速直线运动的速度归结为如下的极限：

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,. \tag{3}$$

这里的 $x-x_0$ 和 $f(x)-f(x_0)$ 分别是函数 $y=f(x)$ 的自变量增量 Δx 和函数的增量 Δy，

$$\Delta x = x - x_0，\quad \Delta y = f(x)-f(x_0) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)，$$

因为 $x \to x_0$ 相当于 $\Delta x \to 0$，故式（3）也可写成

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ 或 } \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\,.$$

在自然科学和工程技术邻域，有许多概念都可以归结为形如式（3）的数学形式．撇开这些量的具体意义，抓住它们在数量关系上的共性，就得出导数的概念了．

（1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数．

定义 2.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 $f'(x)=$（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \to 0$ 时的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\,. \tag{4}$$

也可记为

$$y'\big|_{x=x_0}，\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}\,.$$

也称函数增量与自变量增量之比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是函数 y 在以 x_0 及 $x_0+\Delta x$ 为端点的区间上的**平均变化率**，导数 $f'(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的变化率，即**瞬时变化率**．

（2）函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的导数——导函数．

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导，就称函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内可导．这时对于任一 $x\in I$，都对应着 $y=f(x)$ 的一个确定的导数值，这样就构成一个新函数，这个函数就叫做原来函数 $y=f(x)$ 的**导函数**，记为

$$f'(x)，\quad y'，\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,.$$

即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\,.$$

注意：在上式中，虽然 $x\in I$，即 x 可以取区间 I 内的任何数值，但在极限过程中，x 是常量，Δx 是变量．

（3）点 x_0 处的导数与导函数的关系．

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值．即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$．

通常，导函数简称为**导数**．

（4）不可导的情形．

由导数定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限不存在，即有下述情况之一，称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

① $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$；② $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 无稳定的变化趋势.

（5）导数定义的不同形式.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ 的具体形式有以下几种情况，需要灵活运用.

1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$；

2）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$；

3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$；

4）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$；

5）$\lim\limits_{l\to\infty} l\left[f(x_0+\dfrac{1}{l})-f(x_0)\right]=f'(x_0)$.

（6）可导的充要条件.

根据极限存在的充要条件，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，当且仅当

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad 与 \quad \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

同时存在且相等. 这两个极限值分别称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数和左导数（统称为单侧导数）. 分别记为 $f'_+(x_0)$，$f'_-(x_0)$.

所以可导的充要条件可以表示为：

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0).$$

（7）求导数举例.

例 1 求函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数.

解 $f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0$.

即

$$(C)'=0.$$

这就是说，常数的导数等于零.

例 2 求函数 $f(x)=x^n$ （$n\in\mathbf{N}^+$）在点 $x=a$ 处的导数.

解 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$，

$\lim\limits_{x\to a}=(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1})=na^{n-1}$.

把以上结果中的 a 换成 x 得 $f'(x)=nx^{n-1}$，即

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

更一般地，对于幂函数 $y=x^{\mu}$ （μ 为常数），有

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}.$$

这是幂函数的导数公式.

例 3　求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}=\lim_{h\to0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即

$$(\sin x)'=\cos x.$$

这就是说，正弦函数的导数是余弦函数.

用类似的方法，可求得

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

这就是说，余弦函数的导数是负的正弦函数.

例 4　求函数 $f(x)=\log_a x$ （$a>0$，$a\neq1$）的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{h\to0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

2. **导数的几何意义**

设曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，$M(x_0,y_0)$ 是曲线 C 上的一点，求曲线在点 M 处的切线方程.

在曲线上另取一点 $M_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，如图 2-1 所示，连接 M、M_1 两点，得割线 $\overline{MM_1}$. 割线 $\overline{MM_1}$ 对 x 轴的倾角为 φ，其斜率为 $\tan\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

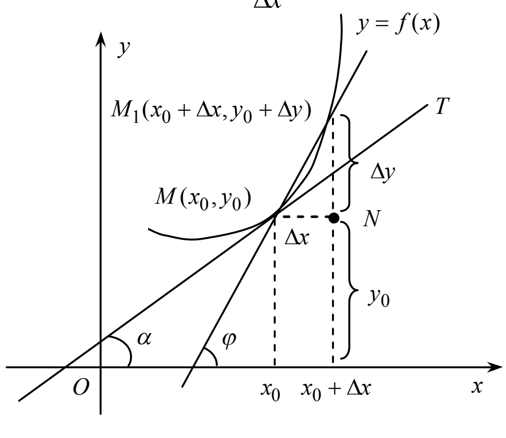

图 2-1

当$\Delta x \to 0$时，点M_1沿曲线C趋向于点M，割线的极限位置MT为曲线$y=f(x)$在点M处的切线．此时

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\tan\varphi=\tan\lim_{\Delta x \to 0}\varphi=\tan\ \alpha=k,$$

其中α是切线MT关于x轴的倾角．从而曲线C在点M处的切线斜率为

$$k=f'(x_0).$$

由此可知，函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$在几何上表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率k，即

$$f'(x_0)=\tan\ \alpha=k.$$

其中α是切线的倾角．

因此曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, y_0)$处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

当$f'(x_0)\neq 0$时，法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

特殊地，当$f'(x_0)=0$时，曲线$y=f(x)$在点(x_0,y_0)处的切线平行于x轴．当$f'(x_0)=\infty$时，曲线$y=f(x)$在点(x_0,y_0)处的切线垂直于x轴．此时，切线的倾角为$\frac{\pi}{2}$．

由上述可知，函数在某点可导与该点存在切线的关系为：可导必有切线；有切线未必可导．

2.1.3 函数连续性和可导性的关系

1. **可导必连续**

设函数$y=f(x)$在点x处可导，即$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$存在，由定理 1.2 知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

其中α是$\Delta x \to 0$时的无穷小量．上式两端同乘以Δx，得

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

由此可见，当$\Delta x \to 0$时，$\Delta y \to 0$，即函数$y=f(x)$在点x处连续．

2. **连续未必可导**

由上面的讨论可知，函数连续是函数可导的必要条件，但不是充分条件，所以如果函数在某点不连续，则函数在该点必不可导．

例如，函数$y=|x|$在点$x=0$处连续（见图 2-2），但$y=|x|$在点$x=0$处不可导．同样，函数$y=\sqrt[3]{x}$在点$x=0$处连续（见图 2-3），但$y=\sqrt[3]{x}$在点$x=0$处不可导．

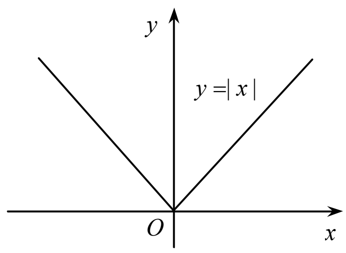

图 2-2

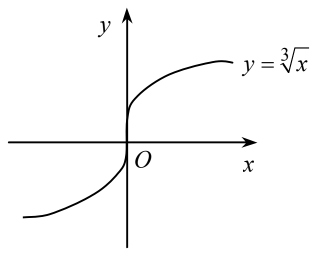

图 2-3

练习 2-1

1．按导数定义计算下列函数在指定点处的导数：

（1）$f(x)=\sin\ 2x$，在 $x=0$ 点求 $f'(x)$；

（2）$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，在 x $(x\neq -1)$ 点求 $f'(x)$；

（3）$y=\sqrt{x+1}$，在 $x=0$ 点求 $y'\big|_{x=0}$；

（4）$y=2x-x^2$，在 x 点求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

2．证明 $(\cos\ x)'=-\sin\ x$．

3．讨论函数 $y=f(x)=|\sin\ x|$ 在点 $x=0$ 处的连续性和可导性．

4．讨论函数 $y=f(x)=\begin{cases} x^{\frac{4}{3}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x<0, \\ 0, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性和可导性．

5．讨论函数 $y=f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性和可导性．

6．试确定常数 a 和 b 的值，使函数 $y=f(x)=\begin{cases} ax+b & x>1 \\ x^2 & x\leqslant 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处可导．

7．讨论函数 $y=f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性和可导性．

8．设曲线 $y=f(x)=2x-x^3$．

（1）求在点 $(1,1)$ 处的切线和法线方程；

（2）(x_0,y_0) 点处的切线通过 $(0,-2)$，求 (x_0,y_0) 点及该点的切线和法线方程．

2.2 求导法则

2.2.1 函数四则运算的求导法则

根据前面导数的定义，可以求出一些简单函数的导数，但对于比较复杂的函数，直接根据定义求导数往往很困难，在本节和下节中，将介绍求导数的几个基本法则和公式.

定理 2.1 设函数 $u=u(x), v=v(x)$ 都在点 x 处可导，即具有导数 $u'=u'(x)$ 和 $v'=v'(x)$，则有

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

（2）$(uv)'=uv'+u'v$；　　$(Cu)'=Cu'$；

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$.

现在证明（2）.

证 设 $f(x)=u(x)v(x)$，则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to 0}v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\\&=uv'+u'v.\end{aligned}$$

法则（1）和（2）可以推广到有限多个函数的情况，如：

$$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w',$$
$$(uvw)'=u'vw\pm uv'w\pm uvw'.$$

例 5 $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\dfrac{\pi}{2}$，求 $f'(x)$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 $f'(x)=3x^2-4\sin x$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\pi^2-4$.

2.2.2 反函数、复合函数的求导法则

1. 反函数的求导法则

定理 2.2 如果函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 上单调可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 $I_x=\left\{x\middle|x=\varphi(y),\ y\in I_y\right\}$ 上也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

证明从略.

即：反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例 6　求 $y = \arcsin x$ 的导数.

解　因为其反函数 $x = \sin y$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调可导，

所以

$$y = (\arcsin x) = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

同理，

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}，\ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}，\ (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2} .$$

例 7　求 $y = a^x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）的导数.

解　因为其反函数 $x = \log_a y$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调连续且可导，且

$$(\log_a y)' = \frac{1}{y \ln a} \neq 0 ,$$

所以

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = y \ln a = a^x \ln a .$$

特别地，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

2. **复合函数的求导法则**

利用前面的方法可以求不少函数的导数，但类似于 $y = \ln\tan x$，$y = \sin^2 x$，$y = \mathrm{e}^{x^2}$ 的函数就不能用前面的方法求导. 利用下面的定理可以解决这类复合函数的求导问题.

定理 2.3　若函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处可导，$y = f(u)$ 在点 $u = \varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x 处也可导，其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x) ,$$

或记为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} . \tag{5}$$

证　设 x 有增量 Δx，则中间变量 u 有增量 Δu，函数 y 有增量 Δy，当 $\Delta u \neq 0$ 时有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} ,$$

从而有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} ,$$

因为 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处可导，所以在点 x 处连续，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$，所以

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) ,\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) ,$$

从而有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

该定理可以推广到有限次复合关系时的情形，如：设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则复合函数 $y=f\left\{\varphi\left[\psi\left(x\right)\right]\right\}$ 的求导公式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

（5）、（6）式称为复合函数求导的**链法则**.

例 8 求 $(\mathrm{e}^{3x})'$.

解 因为 $y=\mathrm{e}^{3x}$ 由 $y=\mathrm{e}^{u}$，$u=3x$ 复合而成，
所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{u}\cdot 3=3\mathrm{e}^{3x}.$$

例 9 求 $y=(\ln\tan x)'$.

解 因为 $y=\ln\tan x$ 由 $y=\ln u$，$u=\tan x$ 复合而成，
所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\sec^2 x=2\csc 2x.$$

注意：在熟练掌握的基础上，可不必写出复合过程，而直接写出结果.

例 10 求 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

例 11 求 $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\dfrac{a}{x}$ 的导数.

解 $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+a\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}-\dfrac{a^2|x|}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$.

例 12 求 $y=[f(ax+b)]^n$ 的导数.

解 $y'=n[f(ax+b)]^{n-1}\cdot f'(ax+b)\cdot a$.

例 13 求 $y=\arctan[\ln(ax+b)]$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{1+\ln^2(ax+b)}\cdot\dfrac{1}{ax+b}\cdot a=\dfrac{a}{[1+\ln^2(ax+b)](ax+b)}$.

例 14 已知 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$，求 $f'(0)$.

方法 1 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}{x}=100\,!$.

方法 2 $f'(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+100)+x[(x+1)(x+2)\cdots(x+100)]'$

$=100\,!$.

例 15　设 $f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 且 $g(0)=g'(0)=0$，证明：$f'(0)=0$.

证　$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\sin\dfrac{1}{x}}{x}$，

又因为 $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，且 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，

故易知 $f'(0)=0$.

例 16　设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有界，$g(x)=f(x)\sin x^2$，求 $g'(0)$.

解　$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)x=0$.

2.2.3　隐函数、对数的求导方法

一般地，若在方程 $F(x,y)=0$ 中，在某区间 I_x 内任取一个 x 值时，总相应地存在确定的 y 值，使方程 $F(x,y)=0$ 成立，则方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个以 x 为自变量 y 为因变量的函数，称这个函数为**隐函数**. 用 $y=f(x)$ 的形式表达的函数称为显函数，将一个隐函数化为显函数的过程称为**隐函数的显化**.

如：$x+y^3-1=0\Rightarrow y=\sqrt[3]{1-x}$，但也有不可显化的隐函数，如：$\mathrm{e}^y-xy+1=0$ 就不能被显化.

现在讨论隐函数的求导方法。其求导的方法有两种：一种是先将隐函数显化，再用以前的方法求导；另一种是对方程两边直接求导，此时要视 y 为 x 的函数，从而关于 y 的表达式是 x 的复合函数，将它对 x 求导数时要用到复合函数的求导法则. 下面通过具体例子来说明这种方法.

例 17　求由方程 $\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}=0$ 所确定的隐函数的导数.

解　两端对自变量 x 求导数得：

$$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-0=0,$$

$$(\mathrm{e}^y+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x+\mathrm{e}^y}\quad(x+\mathrm{e}^y\neq 0).$$

例 18　设 $y^5+2y-x-3x^7=0$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解　两端对自变量 x 求导数得：

$$5y^4y'+2y'-1-21x^6=0,$$

$$y'=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}.$$

又当 $x=0$ 时，由原方程得 $y=0$，代入上式得：

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}.$$

例 19 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处的切线方程.

解 由椭圆方程两端对自变量 x 求导数得：$\frac{2x}{16}+\frac{2y}{9}y'=0$，$\therefore y'=-\frac{9x}{16y}$.

又点 $\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 位于椭圆上，由导数的几何意义知，所求切线的斜率为

$$y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

故所求的切线方程为

$$y-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)\text{，即：}\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0.$$

例 20 设幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$（$u(x)>0$），求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

这个函数既不是幂函数也不是指数函数，通常称为幂指函数．为了求这种函数的导数，结合隐函数，可以用取对数求导法来解决．所谓对数求导法，是先在 $y=f(x)$ 的两边取对数，然后再求出 y 的导数.

解 两边取对数得：$\ln y=v\ln u$，两边对 x 求导数得：

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\text{，}\quad\therefore y'=y\left(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right).$$

即

$$y'=u^v\cdot\left(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right).$$

幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$ 也可以改写为：$y=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$，这样就可以直接利用显函数求导法求导.

例 21 设 $y=x^{\sin x}$ （$x>0$），求 y'.

解 两边取对数得：$\ln y=\sin x\ln x$，两边对 x 求导数得：

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\text{，}\quad\therefore y'=y\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

即

$$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

例 22 设 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(4-x)}}+\sin x$，求 y'.

解 设 $y_1=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(4-x)}}$，则 $y'=y_1'+\cos x$.

对 y_1 两边取对数得：

$$\ln y_1 = \frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(4-x)\right].$$

则 $\frac{1}{y_1}y_1' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{4-x}\right)$，

即

$$y_1' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{4-x}\right)\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(4-x)}}.$$

所以，$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{4-x}\right)\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(4-x)}}+\cos x$.

这里不必讨论函数转化为对数运算后的定义域，原因是：即使考虑自变量的取值范围，也会得出同样的结果.

2.2.4　由参数方程所确定的函数的导数

一般情况下，函数关系用含有自变量和因变量的方程来表示，有时也用参数方程的形式来表示．下面讨论由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t)\cdots\cdots① \\ y=\psi(t)\cdots\cdots② \end{cases}$所确定的函数的导数的求法.

方法有两种。

方法一：消去参数用前面的方法解．如：$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

方法二：在$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$中，若 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t=\overline{\varphi(x)}$，则通过代入法消参，可得 $y=\psi(\overline{\varphi(x)}$，显然它可以看作是由 $y=\psi(t)$，$t=\overline{\varphi(x)}$ 复合而成的函数，若 $\frac{dx}{dt}\neq 0$，则由复合函数求导法则有：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y_t'}{x_t'}.$$

这就是参数方程的求导公式：**函数的导数等于因变量与自变量分别对参数的导数之商**.

例 23　求椭圆$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases}$在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

解　$\because \frac{dx}{dt}=-a\sin t$，$\frac{dy}{dt}=b\cos t$，$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=-\frac{b\cos t}{a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$，$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$.

又当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，$x\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$，$y\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=a\sin\frac{\pi}{4}=\frac{b\sqrt{2}}{2}$，由点斜式得所求切线方程为：

$$y-\frac{b\sqrt{2}}{2}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)，即：bx+ay-\sqrt{2}ab=0.$$

例 24 求平抛运动$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$在时刻$t$时的运动速度的大小和方向.

解 速度的水平分量为：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_1$，

竖直分量为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_2 - gt$，

所以速度的大小为：$v = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{{v_1}^2 + (v_2 - gt)^2}$.

方向：$\tan\alpha = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{v_2 - gt}{v_1}$.

2.2.5 初等函数的导数

由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算，并且可用一个式子表示的函数，所以利用基本初等函数的求导公式以及函数和、差、积、商的求导法则、复合函数的求导法则，就可以求所有初等函数的导数.

初等函数的求导公式如下：

1. **基本初等函数的导数公式**（16 个）

$(C)' = 0$， $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$，

$(\sin x)' = \cos x$ ， $(\cos x)' = -\sin x$，

$(a^x)' = a^x \ln a$， $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$，

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$， $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，

$(\tan x)' = \sec^2 x$， $(\cot x)' = -\csc^2 x$，

$(\sec x)' = \sec x \tan x$， $(\csc x)' = -\csc x \cot x$，

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$， $(\mathrm{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. **函数的和、差、积商的求导法则**

设$u = u(x)$，$v = v(x)$可导，则：

$(u \pm v)' = u' \pm v'$， $(Cu)' = Cu'$（C为常数），

$(uv)' = u'v + uv'$， $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$

3. **复合函数的求导法则**

设$y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，且都可导，则复合函数$y = f[\varphi(x)]$的求导公式为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

4. **反函数的求导法则**

若 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 上单调可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间上也可导，且 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

2.2.6 高阶导数

1. **引入**

大家知道：变速直线运动的速度 $v(t)$ 是位移函数 $s(t)$ 对时间 t 的变化率，即：$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 或 $v=s'$，而加速度 a 又是速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的变化率，即

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \text{或} a=(s')' .$$

像这种导数的导数称为（s 对 t 的）**二阶导数**.

2. **定义**

定义 2.2　若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然对 x 可求导，把 $y'=f'(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**. 记为：

$$y'' \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \quad \text{或} \quad f''(x) .$$

相应地，$y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 称为**一阶导数**，类似地，二阶导数的导数称为**三阶导数**，记为 y'''，$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$；三阶导数的导数称为**四阶导数**，记为 $y^{(4)}$，$\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$；$(n-1)$ 阶导数的导数称为 n 阶导数；记为 $y^{(n)}$，$\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$.

二阶或二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

依定义，不难有：

（1）任何高阶导数，都是较低一阶导数的导数.

（2）若 $f(x)$ 有 n 阶导．则必有一切低于 n 阶的导数.

（3）求高阶导数就是从一阶开始逐阶计算.

例 25　设 $y=ax+b$，求 y'' .

解　$y'=a$，$y''=0$.

例 26　$s=\sin\ \omega t$，求 s'' .

解　$s'=\omega\cos\ \omega t$，$s''=-\omega^2\sin\ \omega t$.

例 27　设 $y=\mathrm{e}^x$，求 $y^{(n)}$.

解　$y'=\mathrm{e}^x$，$y''=\mathrm{e}^x$，设 $y^{(k)}=\mathrm{e}^x$，则 $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=\mathrm{e}^x$，所以：$y^{(n)}=\mathrm{e}^x$.

例 28　设 $y=\sin\ x$，求证：$y^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

解 $$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$y^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$，则 $y^{(k+1)} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right]$.

所以，$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

同理，$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

3. **函数的和、差、积法则**

有时也会涉及到两个函数的和、差、积求高阶导数的情形.

设 $u(x)$，$v(x)$ 具有 n 阶导数，利用导数的运算法则和数学归纳法，不难得到

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = C_n^0 uv^{(n)} + C_n^1 u'v^{(n-1)} + C_n^2 u''v^{(n-2)} + \cdots + C_n^n u^{(n)}v = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

后者称为**莱布尼兹公式**，形式类似于二项式定理 $(u+v)^n$，只不过左边为两函数的乘积，右边为 $n-k$ 或 k 阶导数而已.

例 29 设 $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解 设 $u(x) = x^2$，$v(x) = e^{2x}$，则：

$u'(x) = 2x$，$u''(x) = 2$，$u'''(x) = 0$，$u^{(4)}(x) = \cdots = u^{(20)}(x) = 0$.

$v^{(k)}(x) = 2^k \cdot e^{2x}$.

$$\therefore y^{(20)} = 2^{20} \cdot e^{2x} \cdot x^2 + C_{20}^1 2^{19} \cdot e^{2x} \cdot 2x + C_{20}^2 2^{18} \cdot e^{2x} \cdot 2 + 0 + \cdots + 0$$
$$= 2^{20} \cdot e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$$

练习 2-2

1．求下列函数的导数：

（1）$y = 3x^2 - \frac{2}{x^2} + 5$；

（2）$y = x^2(2 + \sqrt{x})$；

（3）$y = x^2 \cos x$；

（4）$y = a^x + e^x$；

（5） $y=3e^x\cos x$；

（6） $y=e^x(x^2-3x+1)$；

（7） $y=3a^x-\dfrac{2}{x}$；

（8） $y=2\tan x+\sec x-3$；

（9） $y=\sin x\cos x$；

（10） $y=\dfrac{1}{1+x+x^2}$；

（11） $y=\dfrac{x-1}{1+x}$；

（12） $y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 5$；

（13） $y=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$；

（14） $y=\dfrac{2\csc x}{1+x^2}$；

（15） $y=\dfrac{10^x-1}{1+10^x}$.

2．以下各题先指出复合关系，然后再求导.

（1） $y=\ln\tan x$；

（2） $y=e^{x^3}$；

（3） $y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$；

（4） $y=\ln\sin x$；

（5） $y=\sqrt[3]{1-2^{x^2}}$；

（6） $y=\ln\cos e^x$；

（7） $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$；

（8） $y=\sin nx\cdot\sin^n x$（n 为常数）.

3．设 $f(x)$，$g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)>0$，求 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

4．设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

（1） $y=f(x^2)$；

（2） $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

5．若 $f''(x)$ 存在，求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（1） $y=f(x^2)$；

（2） $y=\ln[f(x)]$.

6．设函数 $x = at\cos t$，$y = at\sin t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2.3 函数的微分

2.3.1 微分的概念及几何意义

1. 微分的定义

引例：在给出微分定义之前，先看一个实例．如图 2-4 所示，正方形金属片受热发生变化，其面积 A 的增量 $\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

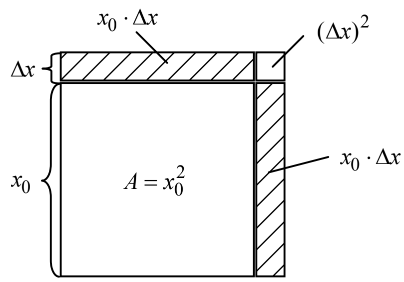

图 2-4

其中：第一部分称为 Δx 的线性部分，它表示阴影面积.

第二部分为 Δx 的高阶无穷小（若 $\Delta x \to 0$ ），故可以用第一部分近似代替面积的增量：$\Delta A \approx 2x_0 \cdot \Delta x$.

定义 2.3 设函数 $y = f(x)$ 在某区间上有定义， x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 在该区间内，若函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) .$$

其中 A 为不依赖于 Δx 的常数，$o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小，称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 **可微**，$A \cdot \Delta x$ 称为 $y = f(x)$ 在点 x_0 处相对应于 Δx 的**微分**，记为：$\mathrm{d}y$ ，即：$\mathrm{d}y = A \cdot \Delta x$.

对于该概念讨论两点：

（1）函数可微的条件.

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，即： $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ ， $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ ，

故 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ ， $f'(x_0) = A$.

所以，若 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，则一定可导，且： $A = f'(x_0)$.

反之，若 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，即： $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ，由定理 1.2 有：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$ ，

其中，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$.

$\therefore \Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$，所以 $f(x)$ 在点 x_0 处可微.

结论：$y=f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\cdot\Delta x$.

（2）微分与增量.

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则 $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$，所以：$\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y-f'(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta y}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[1-\frac{f'(x_0)}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}\right]=0 .$$

即：

$$\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta y) .$$

故称 $\mathrm{d}y$ 为 Δy 的主部，又 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\cdot\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，故又称 $\mathrm{d}y$ 为 Δy 的**线性主部**，从而当 $|\Delta x|$ 很小时，有：$\Delta y\approx\mathrm{d}y$.

例 30　求 $y=x^3$ 在点 $x=1$，$x=3$ 处的微分（记号 $\mathrm{d}y=f(x)\Big|_{x=x_0}\cdot\Delta x$）.

解　$\because y'=3x^2$，$\therefore \mathrm{d}y\big|_{x=1}=(3x^2)\big|_{x=1}\Delta x=3\Delta x$；$\mathrm{d}y\big|_{x=3}=(3x^2)\big|_{x=3}\Delta x=27\Delta x$.

一般地，函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 处的微分就称为函数的微分，记作：$\mathrm{d}y$，即：

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x .$$

如：$y=\mathrm{e}^x$ 的微分为：$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\Delta x$，$y=\cos x$ 的微分为：$\mathrm{d}y=-\sin x\Delta x$.

例 31　求 $y=x^3$ 在 $x=2$，$\Delta x=0.02$ 时的微分.

解　$\because y'=3x^2$，

$$\therefore \mathrm{d}y\Big|_{\Delta x=0.02}^{x=2}=(3x^2)\Delta x\Big|_{\Delta x=0.02}^{x=2}=12\times 0.02=0.24 .$$

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记为 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$，事实上，取 $y=x$，有 $\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\Delta x\Rightarrow\mathrm{d}x=\Delta x$，故 $y=f(x)$ 的微分可记为 $\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\mathrm{d}x$，从而有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x) .$$

因此，导数也称为函数的微分与自变量的微分之商，通常称为**微商**.

$\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\Delta x$ 等式仅用于已知 Δx 的取值时的情形.

2. **微分的几何意义**

如图 2-5 所示，$PQ=MQ\cdot\tan\alpha=f'(x_0)\cdot\Delta x=\mathrm{d}y$.

$$\therefore \mathrm{d}y=PQ .$$

故 $y=f(x)$ 在点 x_0 处自变量 x 有增量 Δx，相应地 y 有增量 Δy 时，$\mathrm{d}y$ 表示曲线在该点的切线上的纵坐标的相应增量.

且当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y-\mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 小很多，故在点 M 附近常以切线段近似代替曲线段 MN.

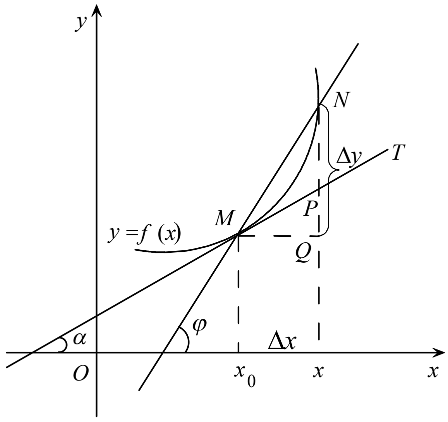

图 2-5

2.3.2 一阶微分形式不变性

由 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 知，求函数的微分只需求得其导数，再乘以自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 即可，由此可得到以下的微分公式和微分法则：

1. **基本函数的微分公式**

$\mathrm{d}(C)=0$，　　$\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$，

$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$，　　$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$，

$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$，　　$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，

$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$，　　$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，

$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$，　　$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$，

$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$，　　$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$，

$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，　　$\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，

$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$，　　$\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. **函数的和、差、积、商微分法则**

如：$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$

证　$\mathrm{d}(uv)=(uv)'\mathrm{d}x=u'v\mathrm{d}x+uv'\mathrm{d}x=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$.

3. **复合函数的微分法则**

根据复合函数的求导法则，由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为：

$$\mathrm{d}y=y'_x\mathrm{d}x=f'(u)\cdot\varphi'(x)\cdot\mathrm{d}x\text{，又 }\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\text{，}$$

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u\ .$$

可见，不论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $\mathrm{d}y=f(u)\mathrm{d}u$ 的形式保持不变，称为**一阶微分形式不变性**（即微分既可以等于对中间变量的导数乘以对中间变量的微分，也可以等于对

自变量的导数乘以对自变量的微分）.

例 32　设 $y=\sin(2x+1)$，求 $\mathrm{d}y$.

解　视 $2x+1$ 为中间变量 u，则：

$\mathrm{d}y=\cos\ u\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x$.

例 33　设 $y=\ln(1+\mathrm{e}^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解　$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\ln(1+\mathrm{e}^{x^2})=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{x^2})=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x=\dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x$.

例 34　设 $y=\mathrm{e}^{1-3x}\cos\ x$，求 $\mathrm{d}y$.

解法一

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\mathrm{e}^{1-3x}\mathrm{d}\left(\cos\ x\right)+\cos\ x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{1-3x}\right)=-\mathrm{e}^{1-3x}\sin\ x\mathrm{d}x+\cos\ x\cdot[\mathrm{e}^{1-3x}\cdot(-3)]\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{1-3x}\left(\sin\ x+3\cos\ x\right)\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

解法二　先求导，再写出微分表达式.

$\because y'=(\mathrm{e}^{1-3x}\cdot\cos\ x)'=-\mathrm{e}^{1-3x}(\sin\ x+3\cos\ x)\ \therefore \mathrm{d}y=-\mathrm{e}^{1-3x}\left(\sin\ x+3\cos\ x\right)\mathrm{d}x$.

例 35　d(　)= $x\mathrm{d}x$.

解　$\because \mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x$，

$\therefore x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$.

一般有：　$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}x^2+C\right)=x\mathrm{d}x$　（C 为任意常数）.

2.3.3　微分在近似求值中的应用

微分在理论上是相当完美的，应用于工程实践，可以使很多复杂费事的计算用简单的公式作出其近似的计算结果.

由前面知，若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导且 $f'(x_0)\neq 0$，则当 $|\Delta x|$ 很小时有：

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\cdot\Delta x\ .$$

即

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{7}$$

或

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{8}$$

对于（8）式，令 $x=x_0+\Delta x$，则有：

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-\Delta x) \tag{9}$$

这样，若 $f(x_0),f'(x_0),\Delta x$ 易知或已知，则可用（7）式近似得到函数的增量，由（8）（9）式可近似计算自变量变化很小时的函数值.

（8）（9）式从几何意义上看，就是用 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线近似代替曲线（x_0 附近）.

例 36 求 $y=\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，取 $x_0=1$，$\Delta x=0.05$. 由式（8）得

$$\sqrt{1.05}=f(1.05)\approx f(1)+f'(1)(0.05)=1+\frac{1}{2}\cdot 0.05=1.025\ .$$

所以通过这种方法，可近似计算自变量变化很小时的函数值.

例 37 一只半径为 1 cm 的球，要给它镀上一层厚 0.01 cm 的铜，估计每只球需铜多少克？（$\rho=8.9\ \mathrm{g/cm^3}$）

解 球的体积公式为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，取 $R_0=1\ \mathrm{cm}$，$\Delta R=0.01\ \mathrm{cm}$，由式（7）可得球体积的增加量为 $\Delta V\approx V'(R_0)\cdot\Delta R$，即铜的体积为：

$$\Delta V\approx V'(R_0)\cdot\Delta R=4\pi {R_0}^2\cdot\Delta R=0.13\ \mathrm{cm^3},$$

所以其质量为

$$m=0.13\times 8.9=1.16\ \mathrm{g}\ .$$

例 38 计算 $\sin\ 30°30'$ 的近似值.

解 $$\sin 30°30'=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}=0.507\ 6\ .$$

特别地，由（9）式可得，当 $x_0=0$ 时有：$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot\Delta x$. 从而不难推出：

（1）$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$；

（2）$\sin\ x\approx x$；

（3）$\tan\ x\approx x$；

（4）$\mathrm{e}^x\approx 1+x$；

（5）$\ln(1+x)\approx x$.

——类似于等价无穷小，其中 x 在 $\sin\ x$，$\tan\ x$ 中为弧度.

练习 2-3

1．已知：$y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1，0.1，0.01 时的 Δy 和 $\mathrm{d}y$.

2．求下列函数的微分：

（1）$y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$；

（2）$y=x\sin 2x$；

（3）$y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$；