第 2 章　模糊计算

2.1　模糊集合

2.1.1　模糊集合概念

模糊集合理论是将经典集合理论模糊化，并引入语言变量和近似推理的模糊逻辑，具有完整的推理体系的一种智能技术。在人类的思维中，有许多模糊的概念，如大、小、冷、热等，都没有明确的内涵和外延，只能用模糊集合来描述；有的集合具有清晰的内涵和外延，如男人和女人。通常把前者叫做模糊集合，而后者叫普通集合（或经典集合）。例如，胖子就是一个模糊集合，它是指不同程度发胖的那群人，它没有明确的界限。

设 X 是论域，X 上的一个实值函数用 μ_A 来表示，即

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

对应 $x \in X$，$\mu_A(x)$ 称为 x 对 A 的隶属度，而 μ_A 称为隶属函数。

1．3 种表达方式

（1）向量表示法。

当论域 X 为有限点集，即 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 时，X 上的模糊集可以用向量 $\boldsymbol{A}$ 来表示，即

$$\boldsymbol{A} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

式中，$\mu_i = A(x_i)$（$i = 1, 2, \cdots, n$）。

（2）Zadeh 表示法。

给定有限论域 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$A$ 为 X 上的模糊集合，则

$$A = \frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_n}{x_n}$$

（3）序偶表示法。

将论域中的元素与其隶属度 $A(x_i)$ 构成序偶来表示 A，则

$$A = \{(x_1, A(x_1)), (x_2, A(x_2)), \cdots, (x_n, A(x_n))\}$$

2．模糊集合的关系

（1）相等。

设 A 和 B 均为 X 上的模糊集，如果对所有 x，即 $\forall x \in X$，均有

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

则称 A 和 B 相等，记作 $A = B$。

（2）包含。

设 A 和 B 均为 X 上的模糊集，如果对所有 x，即 $\forall x \in X$，均有

$$\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$$

则称 B 包含 A，或称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$。

（3）空集。

设 A 为 X 中的模糊集，即 $\forall x \in X$，均有

$$\mu_A(x)=0$$

则称 A 为空集，记作 $A=\phi$。

（4）全集。

设 A 为 X 中的模糊集，即 $\forall x \in X$，均有

$$\mu_A(x)=1$$

则称 A 为全集，记作 $A=\Omega$。

2.1.2 隶属函数

隶属函数是模糊数学中最基本、最重要的概念，正确的隶属函数是运用模糊集合理论解决实际问题的基础。对于一个特定的模糊集，隶属函数体现了其模糊性，隶属函数的值称为隶属度，它是模糊概念的定量描述。隶属函数的确定过程本质上应该是客观的，但每个人对同一模糊概念的认识理解又有差异，因此隶属函数的确定又有一定的主观性。对于同一模糊概念，不同的人会建立不完全相同的隶属函数，尽管形式不完全相同，只要能反映同一模糊概念，要解决和处理实际模糊信息的问题仍然是殊途同归的。

普遍选用的隶属函数有三角形、半三角形、梯形、半梯形、钟形（正态型）、矩形、Z 形、S 形和单点形（δ 函数）等，如图 2-1 所示。

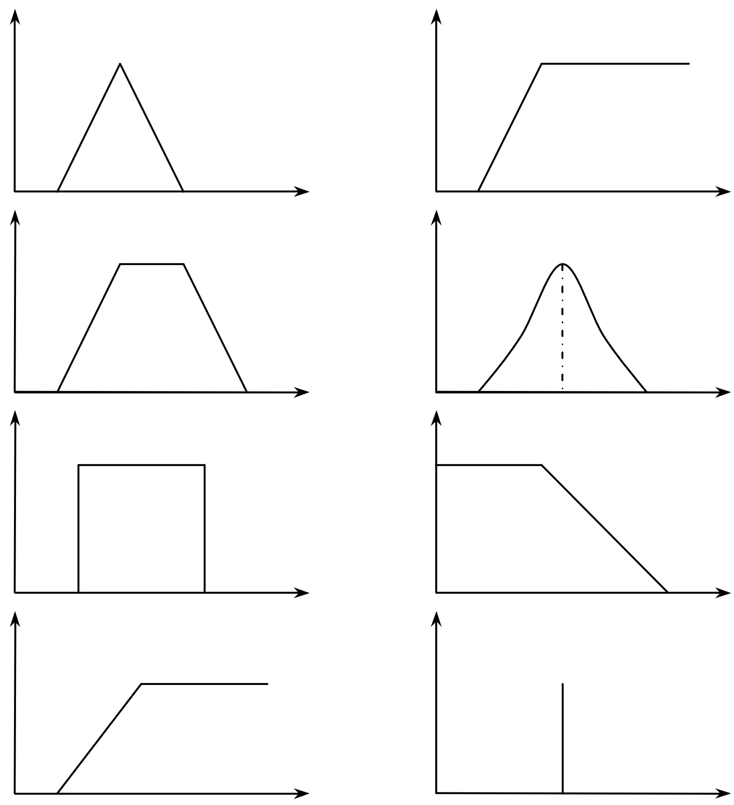


图 2-1 常用的隶属函数

下面介绍两种常用的确定隶属函数的方法。

1. 模糊统计法

模糊统计法是利用确定性的实验来研究不确定性的模糊对象。模糊统计的基本思想是利用足够多的实验，对于要确定的模糊概念在讨论的论域中逐一写出定量范围，再进行统计处理，以确定能被大多数人认可的隶属函数。确定隶属函数的步骤如下：

（1）选择一个论域U。

（2）选择一个固定的元素$x_0 \in U$。

（3）考虑U的一个边界可变化的经典集合A，A与一个模糊集合相关联，确定每一个A都是对于集合元素进行一次划分。

（4）然后进行实验计算。A的隶属度为

$$\mu_A(x) = \frac{x_0 \in A\text{的次数}}{n}$$

随着n的增加，$\mu_A(x)$会趋向$[0,1]$闭区间上的一个固定数，这便是x_0对A的隶属度。

2. 例证法

例证法的主要思想是从已知有限个μ_A的值，来估计论域U上的模糊集合A的隶属函数。例如，U是全体人类，A是“高个子的人”，显然A是模糊集合。为了确定μ_A，可以先给出一个h值，然后选定几个语言真值中的一个，来回答某人高度是否算“高”。如语言真值分为“真的”、“大致真的”、“似真又似假”、“大致假的”、“假的”，然后将这些语言真值分别用数字表示，分别为 1、0.75、0.5、0.25 和 0，对于几个不同高度的h_1，$h_2, \cdots$，h_n都作为样本进行访问，就可以得到隶属函数的离散表示法。

2.1.3　模糊集合运算

设A和B均为X上的两个模糊集，隶属函数分别为μ_A和μ_B，则模糊集合A和B的并集$A \cup B$，交集$A \cap B$和补集A^C的运算可通过它们的隶属函数来定义。

（1）并集。

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

其中$\vee$表示两者比较后取大值。

（2）交集。

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

其中$\wedge$表示两者比较后取小值。

（3）补集。

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

2.1.4　模糊集合与普通集合的关系

1. λ截集

设$A \in F(X)$，任取$\lambda \in [0,1]$，记为

$$A_\lambda = \{x \in X : A(x) \geqslant \lambda\}$$

称 A_λ 为 A 的 λ 截集，其中 λ 称为阈值或置信水平。又记为

$$A_{\lambda^+} = \{x \in X : A(x) > \lambda\}$$

称 A_{λ^+} 为 A 的 λ 强截集。

A_λ 是一个普通集合。

2. 分解定理

设 A 是普通集合，$\lambda \in [0,1]$，做数量积运算，得到一个特殊的模糊集 λA，其隶属函数为

$$\mu_{\lambda A} = \begin{cases} \lambda & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

设 A 为论域 X 上的模糊集，A_λ 是 A 的截集，则有

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda$$

2.2 模糊关系

2.2.1 模糊关系基本概念

（1）给定集合 X 和 Y，由全体 (x,y) $(x \in X, y \in Y)$ 组成的集合，叫做 X 和 Y 的笛卡尔积（或叫直积），记作 $X \times Y$

$$X \times Y = \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$$

（2）存在集合 X 和 Y，它们的笛卡尔积 $X \times Y$ 的一个子集 R 叫做 X 到 Y 的二元关系，即

$$R \subseteq X \times Y$$

（3）模糊关系是指笛卡尔积上的模糊集合，表示多个集合的元素间所具有的某种程度。

$X \times Y = \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$ 中的一个模糊关系 R 是指以 $X \times Y$ 为论域的一个模糊子集，序偶 (x,y) 的隶属度为 $\mu_R(x,y)$。

设 X 是 m 个元素构成的有限论域，Y 是 n 个元素构成的有限论域，对于 X 到 Y 的一个模糊关系 R，可以用一个 $m \times n$ 矩阵表示为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

（4）模糊关系的运算。

1）模糊矩阵并。

$$\boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{Q} = (r_{ij} \vee q_{ij})$$

2）模糊矩阵交。

$$\boldsymbol{R} \cap \boldsymbol{Q} = (r_{ij} \wedge q_{ij})$$

3）模糊矩阵补。

$$\boldsymbol{R}^{C} = (1 - r_{ij})$$

2.2.2　模糊关系合成

（1）设 R 是 $X \times Y$ 中的关系，S 是 $Y \times Z$ 中的关系，所谓 R 和 S 的合成是指定义在 $X \times Z$ 上的模糊关系 $\boldsymbol{Q}$，模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的合成定义为

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R} \odot \boldsymbol{S}$$

或

$$\mu_{R \odot S}(x, z) = \vee \{\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z)\}$$

（2）设 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]$，$\boldsymbol{R} = [s_{jk}]$，模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的合成定义为

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}$$

或

$$q_{ik} = \vee (r_{ij} \wedge s_{jk}) \quad i = 1, 2, \cdots, m\text{；}\quad j = 1, 2, \cdots, l$$

2.2.3　模糊变换

设 A 和 B 分别是 X 和 Y 中的模糊子集，$\boldsymbol{R}$ 是一个模糊矩阵，称

$$A \circ \boldsymbol{R} = B$$

为模糊变换，它把 X 中的模糊集变为 Y 上的模糊集，实现的是论域的转换。其实质是模糊子集 A 和模糊关系的合成。

2.3　模糊推理

2.3.1　模糊语言与语言变量

语言是一种以文字为符号的符号系统，自然语言是人类思维和交流信息的语言，其主要特征是它的模糊性。

1．语言变量和语言值

（1）语言变量是指以自然或人工语言的词、词组或句子作为值的变量，如“偏差”等，语言变量的值称为语言值，如“很大”等。

（2）语言变量对应的以数为值的数值变量叫做基础变量。

例如，对于年龄变量，其基础变量 a，取值为 $1, 2, \cdots, 80$ 等，相应语言变量 A，取值为“较年轻”、“年轻”、“很年轻”等。

模糊语言变量指以自然或人工语言的词、词组或句子作为值的变量。例如，在模糊控制中的“偏差”、“偏差变化率”等，它是一种定量地、形式地描述自然语言的模糊变量。语言变量的值称为变量值，一般为自然或人工语言的词、词组或句子。例如，“正大”、“正中”、“正小”、“零”、“负小”、“负中”、“负大”等 7 个语言变量，用 PB、PM、PS、P0、NS、NM、NB 表示“偏差”、“偏差变化率”的值。

对于一个确定的误差变量 e，其实际变化范围为 $[-e_{\max}, e_{\max}]$，称为误差的基本论域。若将 $0 \sim e_{\max}$ 范围内连续变化的误差分成 n 个区间，使之离散化，则误差所取模糊变量集合的论域为 $X = \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}$，一般取 $n=6$，从而构成含有 13 个整数的集合。由确定数 e_1 乘以比例因子 a_e 后，再进行四舍五入便得 n，查找模糊语言变量 E 的赋值表，找出 n 上与最大隶属度对应的模糊集合，该模糊集合就代表确定数 e_1 的模糊化结果。

2. 语言算子

语言算子包括语气算子；集中化算子，如“很”、“极”等；散漫化算子，如“略”、“微”等；概率算子，如“大概”、“近似于”等；判定化算子，如“偏向”、“多半”等。

2.3.2 模糊命题与模糊条件语句

1. 模糊命题

对于含有模糊概念的对象，只能采用基于模糊集合论的模糊逻辑来描述。模糊命题是指含有模糊概念，具有某种真实程度的陈述句。分为性质命题和关系命题两种。一般形式为

$$P:\ p \text{ is } A$$

模糊命题的真值由该变元对模糊集合的隶属程度表示，定义为

$$P = \mu_A(p)$$

模糊命题之间有析取、合取、取非运算。

设有模糊命题 $P: p \text{ is } A$，$Q: q \text{ is } B$，则

（1）合取 $P \times Q$，其真值为

$$P \times Q = (\mu_A(p) \wedge \mu_B(q))$$

（2）析取 $P + Q$，其真值为

$$P + Q = (\mu_A(p) \vee \mu_B(q))$$

（3）取非 P^C，其真值为

$$P^C = 1 - \mu_A(p)$$

2. 模糊条件语句

带有模糊词的条件语句称为模糊条件语句。

（1）简单模糊条件语句。

用模糊命题 A 表示“x 是 a”，B 表示“y 是 b”，则简单模糊条件语句可表示为

$$\text{IF } A \text{ THEN } B$$

命题表达式为

$$A \to B = A \times B$$

其真值是 $X \times Y$ 上的一个二元模糊关系 R，其隶属函数为

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \to B}(x, y) = (1 - \mu_A(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

（2）多重简单模糊条件语句。

其句型为

$$\text{IF } A_1 \text{ THEN } B_1 \text{ ELSE}$$
$$\text{IF } A_2 \text{ THEN } B_2 \text{ ELSE}$$
$$\cdots$$

$$\text{IF } A_n \text{ THEN } B_n$$

语句中的“ELSE”一词，可以处理成“或”，也可以处理成“与”。

命题表达式为

$$\begin{aligned}&(A_1 \to B_1) \cup (A_2 \to B_2) \cup \cdots \cup (A_n \to B_n)\\&= (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup \cdots \cup (A_n \times B_n)\end{aligned}$$

其真值定义为 Mamdani 模糊蕴含关系（“或”）

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n$$

其隶属函数为

$$\begin{aligned}\mu_R(x,y) &= \mu_{R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n}(x,y)\\&= \mu_{R_1}(x,y) \vee \mu_{R_2}(x,y) \vee \cdots \vee \mu_{R_n}(x,y)\\&= (\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{B_1}(y)) \vee (\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{B_2}(y)) \vee \cdots \vee (\mu_{A_n}(x) \wedge \mu_{B_n}(y))\\&= \bigvee_{i=1}^{n} (\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y))\end{aligned}$$

（3）多维模糊条件语句。

其句型为（二维）

$$\text{IF } A \text{ AND } B \text{ THEN } C$$

命题表达式为

$$(A \times B) \to C = A \times B \times C$$

其真值定义为 Mamdani 模糊蕴含关系（“或”），为 $X \times Y \times Z$ 上的一个三元模糊关系 R，其隶属函数为

$$\mu_R(x,y,z) = (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \wedge \mu_C(z) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)$$

（4）多重多维模糊条件语句。

其句型为

$$\begin{aligned}&\text{IF } A_{11} \text{ AND } A_{12} \text{ AND } \cdots \text{AND } A_{1n} \text{ THEN } B_1 \text{ ELSE}\\&\text{IF } A_{21} \text{ AND } A_{22} \text{ AND } \cdots \text{AND } A_{2n} \text{ THEN } B_2 \text{ ELSE}\\&\cdots\\&\text{IF } A_{m1} \text{ AND } A_{m2} \text{ AND } \cdots \text{AND } A_{mn} \text{ THEN } B_m\end{aligned}$$

语句中的“ELSE”一词，可以处理成“或”，也可以处理成“与”。

对于二维多重情形，命题表达式为

$$\begin{aligned}&((A_1 \times B_1) \to C_1) \cup ((A_2 \times B_2) \to C_2) \cup \cdots \cup ((A_n \times B_n) \to C_n)\\&= ((A_1 \times B_1) \times C_1) \cup ((A_2 \times B_2) \times C_2) \cup \cdots \cup ((A_n \times B_n) \times C_n)\end{aligned}$$

其真值定义为 Mamdani 模糊蕴含关系（“或”）

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n$$

其隶属函数为

$$\begin{aligned}&\mu_R(x,y,z) = \mu_{R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n}(x,y,z)\\&= \mu_{R_1}(x,y,z) \vee \mu_{R_2}(x,y,z) \vee \cdots \vee \mu_{R_n}(x,y,z)\\&= (\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{B_1}(y) \wedge \mu_{C_1}(z)) \vee (\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{B_2}(y) \vee \mu_{C_2}(z)) \vee \cdots \vee (\mu_{A_n}(x) \wedge \mu_{B_n}(y) \wedge \mu_{C_n}(z))\end{aligned}$$

$$=\bigvee_{i=1}^{n}(\mu_{A_i}(x)\wedge\mu_{B_i}(y)\wedge\mu_{C_i}(z))$$

2.3.3 模糊推理

1. 模糊推理的基本概念

模糊推理又称模糊逻辑推理，是指从已知模糊命题（包括大前提和小前提），推出新的模糊命题作为结论的过程，是一种近似推理。

2. 关系合成推理法（CRI）

（1）Zadeh 的推理方法。

1）模糊取式（FMP）。已知命题 $A\to B$，其真值是 $X\times Y$ 上的一个二元模糊关系 R，对于给定的 A^*，$A^*\in X$，则可由下式推出结论 $B^*(B\in Y)$

$$B^*=A^*\circ R$$

其隶属函数为

$$\mu_{B^*}(y)=\mu_{A^*}(x)\circ\mu_R(x,y)=\mu_{A^*}(x)\circ((1-\mu_A(x))\vee(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)))$$
$$=\operatorname*{Sup}_{x\in X}\{\mu_{A^*}(x)\wedge((1-\mu_A(x))\vee(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)))\}$$

2）模糊拒取式（FMT）。已知命题 $A\to B$，其真值是 $X\times Y$ 上的一个二元模糊关系 R，对于给定的 $B^*(B\in Y)$，则可由下式推出结论 $A^*(A^*\in X)$

$$A^*=R\circ B^*$$

其隶属函数为

$$\mu_{A^*}(x)=\mu_R(x,y)\circ\mu_{B^*}(y)=((1-\mu_A(x))\vee(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)))\circ\mu_{B^*}(y)$$
$$=\operatorname*{Sup}_{y\in Y}\{((1-\mu_A(x))\vee(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)))\wedge\mu_{B^*}(y)\}$$

（2）Mamdani 的推理方法。

1）对 FMP。

$$\mu_{B^*}(y)=\mu_{A^*}(x)\circ\mu_R(x,y)=\mu_{A^*}(x)\circ(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))$$
$$=\bigvee_{x\in X}\{\mu_{A^*}(x)\wedge(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))\}=\bigvee_{x\in X}\{\mu_{A^*}(x)\wedge\mu_A(x)\}\wedge\mu_B(y)$$
$$=\alpha\wedge\mu_B(y)$$

2）对 FMT。

$$\mu_{A^*}(x)=\mu_R(x,y)\circ\mu_{B^*}(y)=(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))\circ\mu_{B^*}(y)$$
$$=\bigvee_{y\in Y}\{(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))\wedge\mu_{B^*}(y)\}=\mu_A(x)\wedge\bigvee_{y\in Y}\{\mu_B(y)\wedge\mu_{B^*}(y)\}$$
$$=\mu_A(x)\wedge\alpha$$

Zadeh 与 Mamdani 方法的差别主要体现在模糊关系 R 的方法上。前者为 $(1-\mu_A(x))\vee(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))$，而后者为 $\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)$。

（3）多输入模糊推理（采用 Mamdani 方法）。

已知命题 $(A\times B)\to C$，其真值定义为 Mamdani 模糊蕴含关系（“或”），为 $X\times Y\times Z$ 上的一个三元模糊关系 R，对于给定 A^*、B^*，可由下式推出结论 C^*，即

$$C^*=(A^*\times B^*)\circ R$$

其隶属函数为

$$\mu_{C^*}(z)=(\mu_{A^*}(x)\wedge\mu_{B^*}(y))\circ\mu_R(x,y,z)=(\mu_{A^*}(x)\vee\mu_{B^*}(y))\circ(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\wedge\mu_C(z))$$
$$=\bigvee_{x\in X}\{\mu_{A^*}(x)\wedge\mu_A(x)\}\wedge\bigvee_{y\in Y}\{\mu_{B^*}(y)\wedge\mu_B(y)\}\wedge\mu_C(z)$$
$$=(\alpha_A\wedge\alpha_B)\wedge\mu_C(z)$$

（4）多输入多规则推理（采用 Mamdani 方法）。

已知命题 $((A_1\times B_1)\to C_1)\cup((A_2\times B_2)\to C_2)\cup\cdots\cup((A_n\times B_n)\to C_n)$，其真值定义为 Mamdani 模糊蕴含关系（“或”）$R=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_n$，对于给定 A^*、B^*，可由下式推出结论 C^*，即

$$C^*=(A^*\times B^*)\circ R$$

其隶属函数为

$$\mu_{C^*}(z)=(\mu_{A^*}(x)\vee\mu_{B^*}(y))\circ\mu_R(x,y,z)=(\mu_{A^*}(x)\wedge\mu_{B^*}(y))\circ\bigvee_{i=1}^{n}(\mu_{A_i}(x)\wedge\mu_{B_i}(y)\wedge\mu_{C_i}(z))$$
$$=\bigvee_{i=1}^{n}(\alpha_{A_i}\wedge\alpha_{B_i})\wedge\mu_C(z)$$

2.4　模糊计算在工程技术中的应用实例

2.4.1　模糊控制系统的原理与设计过程

模糊控制系统的组成具有常规计算机控制系统的结构形式，如图 2-2 所示。模糊控制系统由模糊控制器、输入/输出接口、执行机构、被控对象和测量装置等 5 部分组成。

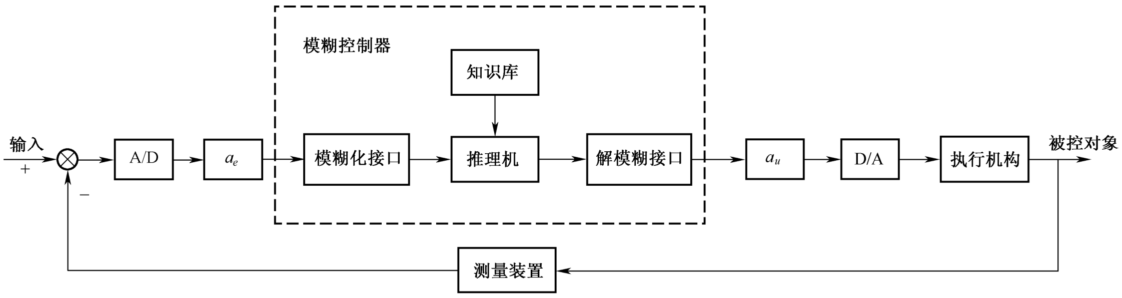


图 2-2　模糊控制系统的基本原理

其中，被控对象为复杂的工业过程，可以是线性的或非线性的，也可能存在各种干扰，是模糊的、不确定的、没有精确数学模型的过程。执行机构除了直流电动机、步进电动机等外，还可以是液压马达、液压阀等。输入/输出接口完成模/数、数/模转换及电平转换等。

模糊控制系统的核心部分是模糊控制器，模糊控制器的控制规律由计算机的程序来实现，以一步模糊控制算法为例，实现过程：微机经中断采样获取被控量的精确值，然后将此量与给定值比较得到误差信号 e，再将 e 乘以比例因子 a_e，查表得到模糊量 PB，由 PB 和模糊控制规则 R 根据模糊推理的合成规则进行模糊决策，得到模糊控制量

$$U=PB\circ R$$

式中，U 是一个模糊量。还需要将模糊量转换为精确量，这一步称为非模糊化处理，得到了精确的数字控制量后，经数/模转换为精确的模拟量送给执行机构对被控对象进行控制。

综上所述，模糊控制系统的基本算法可概括为 4 个步骤：

（1）根据采样得到系统的输出值，计算所选择的系统的输入变量。

（2）将输入变量的精确值变为模糊量。

（3）根据输入模糊量及模糊控制规则，按模糊推理合成规则计算模糊控制量。

（4）由上述得到的模糊控制量计算精确的控制量。

2.4.2 模糊控制在电饭锅中的应用

普通电饭锅是由加热器、内锅、锅盖、开关、磁钢限温器、自动保温器（双金属片恒温器）、指示灯、电源插柱和外壳等部分组成，如图 2-3 所示。

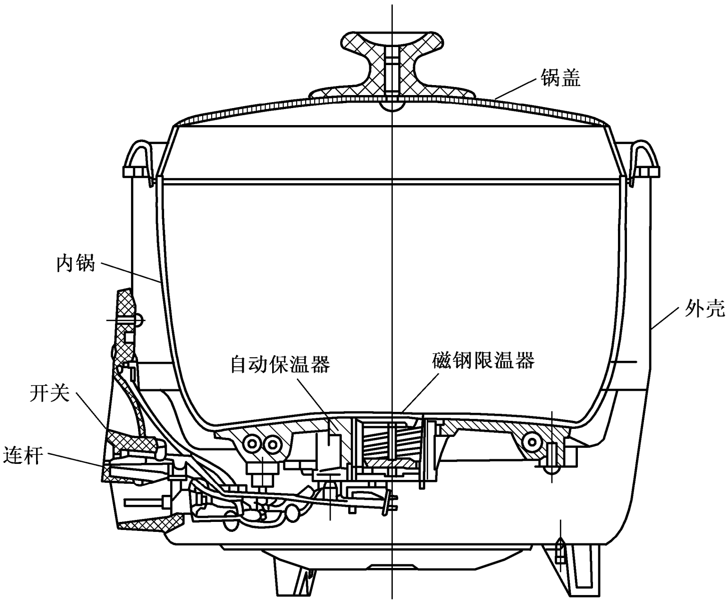


图 2-3 普通电饭锅结构

普通电饭锅主要通过内锅底的电热盘加热，该电热盘是由管状电热元件铸在铝合金中制成的，热敏率很高、不易氧化、使用寿命长，实际中它与锅底紧密接触，保证了电热盘的热能均匀地传至内锅底面。当饭熟后，可通过磁钢限温器断电。磁钢限温器由永磁钢和软磁钢组成，电饭锅开始工作时，两块磁钢接触吸合，当内锅温度升至103℃时，软磁钢达到居里点失磁，两块磁钢断开，电饭锅自动断电，温度开始下降。当内锅温度下降到一定程度时，保温电触点闭合，电饭锅保温器开始工作。保温器实际上是由两种膨胀系数不同的双金属薄片扎在一起构成的，受热到一定程度时双金属薄片弯曲、分开，电饭锅断电。

由上可看出，普通电饭锅主要靠磁钢限温器和双金属薄片保温器这些器件控制断电和保温的，但这些器件的金属片存在导磁的不一致性、调整的不一致性、磁惰性和机械惰性等缺点，所以电饭锅的控制特性也会随之不准确。而且由于做饭时米量、水量和饭质是不断变化的，在

每个煮饭阶段使用单一的温度控制很难达到良好的效果。

1. 模糊电饭锅的原理

使用模糊控制的电饭锅可以自动识别米量，能根据米量的多少来确定最佳烧饭温度曲线，且可设置多个烧饭时间。由于米量和饭质的变化是随机的，而模糊控制并不需要知道被控对象的数学模型就能适应各种参数的变化，从而实现对非线性过程的良好控制。其控制原理图如图 2-4 所示。

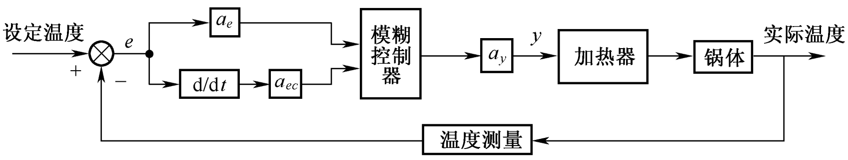


图 2-4　电饭锅模糊控制原理

图 2-4 中，实际测得的温度与给定温度值比较得温度偏差 e 、a_e 、a_{ec} 与 a_y 为比例因子，y 为经解模糊处理后的控制输出。模糊控制器要先采样电饭锅各项参数的参数值，再将检测到的参数值模糊化，然后进行模糊推理得到模糊决策，最后电饭锅根据解模糊决策后的精确值对加热器进行控制。所有这些模糊控制的进行要通过单片机的编程来实现。

2. 电饭锅的模糊控制算法

模糊电饭锅根据检测到的各种温度信息和状态来自动调节电饭锅的加热过程，这个过程可分为吸水、加热、焖饭、膨胀和保温 5 个阶段。其中米饭的质量主要取决于加热阶段，在此阶段要能测出米量，才能确定相应的加热策略，以后的推理和控制也都是以米量为依据的。所以，米量的测量是很重要的一步。

（1）米量的模糊推理。

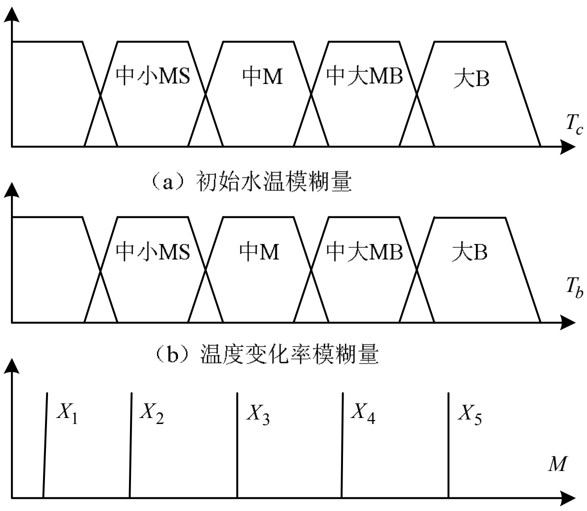
一般在吸水阶段便进行米量的测定，因为若在加热阶段一边进行温度控制，一边计算米量很难取得理想的温度控制。在吸水阶段，电饭锅刚开始通电，锅内的温度还未上升，米还未开始大量吸水，随着加热，当温度上升到稍低于淀粉糖化温度（60℃）时开始计时，米开始大量吸水，继续加热，当温度大于等于 70℃时计时结束，得计时时间 t，吸水阶段也结束，这时继续加热。在米量的模糊推理中，用 T_c 表示初始水温，T_b 表示温度变化率，米量 M 为推理结果。当室温不变或变化不大时，米量与温度变化率有密切的关系，同时，温度变化率又与初始水温有一定关系，所以米量要根据温度变化率和初始水温来推理出。其推理规则为：IF T_c AND T_b THEN M。其中初始水温 T_c 和温度变化率 T_b 及米量 M 模糊量如图 2-5 所示。

在模糊推理中运用大小模糊语言变量，可根据经验或专家列出模糊控制规则库，库由诸如：IF $T_c = \mathrm{MS}$ AND $T_b = \mathrm{S}$ THEN $M = X_4$ 这样的控制规则语句组成，对于每条控制规则都有一条模糊条件语句，每一条模糊条件语句都可用论域的幂集上的一个模糊关系 R_i 来表示，对于双输入－单输出的系统，第 i 条规则对应的推理关系为 $R_i = T_{ci} \times T_{bi} \times M_i$ 形式。将所有的控制规则；利用“或”的关系组合在一起，描述整个系统的控制规则的模糊关系 R 可写成

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$$

则米量 $M = (T_c \times T_b) \circ R$ 。很显然，模糊规则越多，运算量越大。一般取 10 条规则语句就

够了。最后根据测米量所用的时间和测得的米量以及设定的参数来选择适当的加热功率进行加热。例如，小米量选择 1/3 功率加热，中米量选择 2/3 功率加热，大米量选择全功率加热。



（a）初始水温模糊量

（b）温度变化率模糊量

（c）米量的模糊量

图 2-5　T_c、T_b 和 M 模糊量变化

（2）温度模糊控制规则。

在模糊电饭锅中，温度的控制主要是通过改变双向晶闸管的触发控制角进行控制的。有两种控制情况，一种是恒温控制，另一种是匀速升温控制。恒温控制用于沸腾和保温阶段，匀速升温控制用于加热阶段。在加热阶段，温度偏差 e 和温度偏差变化率 Δe 的模糊语言变量 E 和 ΔE 取负大（NB）、负中（NM）、负小（NS）、零（P0）、正小（PS）、正中（PM）、正大（PB）7 个语言值，把双向晶闸管的触发控制角 A 分为 0°、30°、60°、90°、120°、150°、180°七个模糊量。总结专家操作的经验，确定各语言变量值在 X 论域上的隶属函数，建立语言变量 E 和 ΔE 的赋值表，如表 2-1 所示。

表 2-1　语言变量 E 和 ΔE 的赋值表

语言值 \ X	-6	-5	-4	-3	-2	-1	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.8	1	0.8	0.2
PS	0	0	0	0	0	0	0	0.8	1	0.8	0.2	0	0
P0	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0
NS	0	0	0.2	0.8	1	0.8	0	0	0	0	0	0	0
NM	0.2	0.8	1	0.8	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

然后总结控制策略，得出由模糊条件语句构成的控制规则，如形式为“IF　E　AND　ΔE

THEN A”的模糊语句，根据这些模糊语句可得到相应的模糊关系 R_i，则总的模糊关系为 $R=\bigcup_{i=1}^{m}R_i$。最后的模糊输出 $Y=(E\times\Delta E)\circ R$。解模糊输出得到温度的控制量 y 对加热器进行控制。

（3）电饭锅模糊控制器硬件构成。

电饭锅模糊控制器硬件构成如图 2-6 所示。

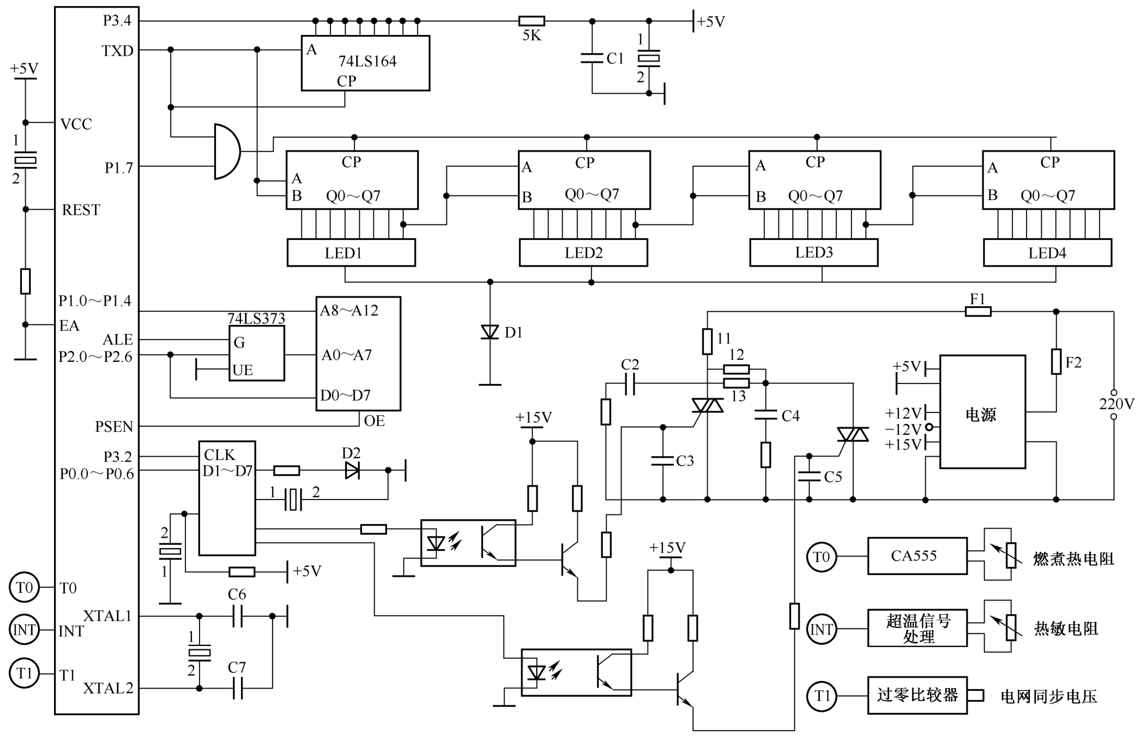


图 2-6　电饭锅模糊控制器硬件构成

这是以 8051 单片机为核心组成的电饭锅模糊控制器，包括电源、8051 单片机、功能输入电路、信号检测电路、显示报警电路和加热控制电路。

2.4.3　模糊优化研究进展

多年来，关于系统辨识的建模与优化已成为一个非常活跃的研究领域。系统辨识特别是对复杂工业系统的系统辨识中的许多实际问题，由于数据环境的复杂性（Complexity），原材料市场的易变性（Variability）和不可靠性（Unreliability），以及用户对产品的多样性和复杂性要求等，存在各种形式的可变性（Variability）、随机性（Randomness/stochastics）、非精确性（Impreision/approximation）和含糊性（Vagueness），通称为非确定性（Uncertainty）。这些形式的非确定性常归类为两种类型，即随机非确定性（Stochastic Uncertainty）和模糊性（Fuzziness）。这些非确定性既不能用传统的确定性模型来描述和表达，更不能用基于精确数学方法的模型求解方法来优化。基于确定性数学模型的计算机自然也无能为力。另外，现实中

的系统辨识问题常常表现为非线性关系。

为了避免确定性模型和方法不能有效地处理非确定性信息的缺点，50 年代后期以来，一些研究人员曾经基于概率论理论提出用随机方法建立随机优化模型。尽管随机优化模型在一些领域如库存理论、财政与金融，特别是服务行业取得了一些应用，但基于概率论理论建立随机模型及其在实际问题的求解中存在如下一些问题：①概率分布不容易确定；②缺乏计算的有效性，计算效率低；③非柔性的概率规则不能给出决策者真正的非精确性解释。

实际上，决策者并不认为通常的概率分布是正确的。对于一些非精确信息，特别是没有清晰界限的信息，与人类语言/行为相关的信息，或由于受人类知识和认识所限而难以表达和清晰定义的信息等，这些信息常称为模糊性信息。对于这种模糊性信息用随机性意义来描述是不恰当的，而处理这种模糊性信息的一种重要方法和工具是模糊集理论（Fuzzy Set Theory）和基于模糊集理论的模糊优化（Fuzzy Optimization）方法。许多学者相继提出了模糊线性规划模型、模糊多目标规划模型、模糊整数规划模型、模糊动态规划模型、模糊随机规划模型及模糊非线性规划模型，并提出了求解方法。但现行的模糊数学规划的研究大部分局限于线性规划和多目标规划。而对模糊非线性规划包括模糊二次规划研究起步较晚，但也已取得一批有价值的成果。

20 世纪 70 年代 Bellmann 和 Zadeh 提出模糊决策（Fuzzy Decision）的概念，为模糊环境下的决策提供了有效的方法。自此模糊优化（Fuzzy Optimization，OP）包括模糊数学规划（Fuzzy Mathematical Programming，FMP）的研究及其在生产实际中的应用研究已经成为一个非常活跃的研究领域。目前国内外涌现了一批研究模糊优化的代表性人物，如 S.S.Rao。他主要研究了求解模糊约束下的多目标优化算法。需要指出的是，S.S.Rao 只讨论了约束的模糊性问题。S.J.Shih 等在 S.S.Rao 研究工作的基础上对权系数在模糊优化设计中如何处理进行了有益的探索。但他们并未对模糊运算本身优化问题进行深入的讨论。80 年代以来许多学者像 D.Dubois 和 S.Han 提出了模糊线性规划（Fuzzy Linear Programming，FLP）模型，M.Gen 和 E.S.Lee 提出了模糊多目标规划（Fuzzy Multi-Objective Programming，FMOP）模型，J.P.Ignizio 和 M.Stoica 等提出了模糊整数规划（Fuzzy Integer Programming，FIP）模型，M.L.Hussein 和 M.A.A.Abo-sinna 等提出了模糊动态规划（Fuzzy Dynamic Programming，FDP）模型，M.K.Luhundjula 和 M.M.Grupta 等提出了模糊随机规划（Fuzzy Stochastic Programming，FSP）模型和模糊非线性规划（Fuzzy Non-Linear Programming，FNLP）模型，并提出了求解这些模型的方法。汪定伟、唐加福和 FUNG 将沿着加权梯度方向变异的遗传算法和选择偏好解的人机接口结合起来，创建了针对线性目标和资源优化问题的一种新方法——非精确方法。由于模糊优化问题不能用传统的方法来解决，同时在由模糊优化问题转换为等价的或近似的确定性优化问题时常常伴有非线性、非连续性等传统优化方法难以克服的困难，因而采用智能化的优化方法来求解优化问题是一个很重要的理论研究课题。相对于其他优化算法，遗传算法提供了一种求解非线性、多模型、多目标等复杂系统优化问题的通用框架，它不依赖于问题所属的具体领域。

2.5　粗糙集方法简介

1．信息的不确定性和含糊性

以数据库为基础进行知识发现，会遇到信息的不确定性和含糊性的困难。具体表现为以

下几点：

（1）数据动态变化。这是大多数数据库的一个主要特征。

（2）噪声。数据的手工录入及主观选取等操作，可能使数据库中包含错误数据，这种错误数据便是数据的噪声。

（3）数据不完整。数据库中个别记录的属性域可能存在空值现象。

（4）冗余信息。数据库中某些记录有时在多处存储。冗余的信息容易造成错误的知识发现。

（5）数据稀疏。数据库的数据模型通常对应着很大的信息空间，由于进行知识发现时，要在这个信息空间中搜索，因此也被称为发现空间。相对发现空间，数据库中实际包含的数据往往显得非常稀疏。

2. 粗糙集的概念

粗糙集（Rough Set）理论是由 Pawlak 于 1982 年提出的，是处理上述信息的不确定性和含糊性的有力工具。下面结合关系数据库中的实例来介绍粗糙集的概念。

在关系数据库系统中，信息系统模型用二维表格表示，如表 2-2 所示。

表 2-2　关系数据库实例

记录（Record）	属性（Attribute）			
	a_1（姓名）	a_2（性别）	a_3（年龄）	a_4（出生地）
R_1	张三	男	20	北京
R_2	李四	女	21	上海
R_3	王五	男	20	北京
R_4	赵六	女	23	广州
R_5	刘七	男	19	重庆

对于这一信息系统，也可以用集合论的方法来表示，即用一个二元式 $S=(U,A)$ 来表示。U 为记录的集合，$U=\{R_1,R_2,\cdots,R_5\}$； A 为属性的集合， $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 。

在这个信息系统中，只看某些属性，一些记录（个体）是无法区分的，即不同的个体在被考虑的属性集上有相同的值。例如，只考虑属性集 $\{a_2,a_3,a_4\}$ ，则 U 中的个体 R_1 和 R_3 是无法区分的。因此，A 中的任何一个属性子集都可对 U 进行分类。

【定义 2-1】在信息系统 S 中，对于一个属性子集 B ，定义二元关系 $\mathrm{ind}(B)$ 为不分明关系（或称等价关系）。即如果元素 u 和 v 属于集合 U，并且如果只考虑属性集 B，u 和 v 无法区分，则 u 与 v 的这种关系可以表示为 $u\ \mathrm{ind}(B)v$ ，称个体 u 与 v 在 B 中的属性上具有等价关系。

有了上述等价关系的概念后，就可以在信息系统上定义粗糙集了。

【定义 2-2】设有信息系统 $S=(U,A)$ ，X 是 U 的子集，B 是 A 的子集，$\mathrm{ind}(B)$ 是 $U\times U$ 上的等价关系， $B(u)$ （其中 $u\in U$ ）是按等价关系 $\mathrm{ind}(B)$ 得到的包含 u 的等价类，称 $B(u)$ 为 B -基本集。用属性集 B 对 U 进行划分，即 U/B ，获得的是一个等价类集。将子集 X 的下近似集 $B\_(X)$ 和上近似集 $B^{-}(X)$ 分别定义如下：

$$B\_(X)=\{u,u\in U\text{且}B(u)\text{是}X\text{的子集}\}$$

$$B^{-}(X)=\{u,u\in U\text{且}B(u)\cap X\neq\varnothing\}$$

式中，$\varnothing$ 表示空集。

由定义 2-2 可知，$B\_(X)$ 是所有元素都包含在 X 中的，U 上关于 B 的等价类的联合；而 $B^{-}(X)$ 是有元素包含在 X 中的，U 上关于 B 的等价类的联合。显然，X 关于 B 的上近似集 $B^{-}(X)$ 中的元素数，大于或等于 X 关于 B 的下近似集 $B\_(X)$ 中的元素数。

以表 2-2 所示的信息系统为例，令 $B=\{a_2\}$，$X=\{R_2,R_3,R_4\}$，则

$$B(R_1)=B(R_3)=B(R_5)=\{R_1,R_3,R_5\}$$
$$B(R_2)=B(R_4)=\{R_2,R_4\}$$
$$U/P=\{\{R_1,R_3,R_5\},\{R_2,R_4\}\}$$
$$B\_(X)=B(R_2)\cup B(R_4)=\{R_2,R_4\}$$
$$B^{-}(X)=B(R_2)\cup B(R_3)\cup B(R_4)=\{R_1,R_2,R_3,R_4,R_5\}$$

【定义 2-3】 X 关于 B 的边界区域为

$$Bnd_B(X)=B^{-}(X)-B\_(X)$$

如果 $Bnd_B(X)=\varnothing$，则称集合 X 为 B 上可定义集合；否则，称 X 为 B 上不可定义集合，或称粗糙集。

按照定义 2-3，上例的 $Bnd_B(X)=\{R_1,R_3,R_5\}\neq\varnothing$，因此 $X=\{R_2,R_3,R_4\}$ 为 $B=\{a_2\}$ 上的粗糙集。从本例的具体意义来讲，子集 X 对于 a_2（性别）这个属性来说是粗糙的（不可定义的），因为既不能说它是男性的集合或是女性的集合，也不能说它是男性和女性的集合（因为有两个男性的个体并没有被包含）。显然，如果 $X=\{R_2,R_4\}$，或是 $X=\{R_1,R_3,R_5\}$，或是 $X=\{R_1,R_2,R_3,R_4,R_5\}$，则 $Bnd_B(X)\neq\varnothing$，即 X 对于 a_2 这个属性来说就不是粗糙的（是可定义的）。

3．*含糊性与不确定性的表示*

粗糙集理论提供了处理含糊性和不确定性的工具。根据这一理论，可以考察某一概念（论域中的子集 X）在一个近似空间（属性子集 B）中的含糊性。

【定义 2-4】 含糊性系数

$$a_B(X)=\left|B\_(X)\right|/\left|B^{-}(X)\right|$$

即等于 $B\_(X)$ 中的元素数与 $B^{-}(X)$ 中的元素数之比。

显然，$a_B(X)$ 是一个 $[0,1]$ 区间的数值。当 $\left|B\_(X)\right|=\left|B^{-}(X)\right|$，即 $a_B(X)$ 为 1 时，概念是清晰的；$a_B(X)$ 越小，概念越含糊。

例如，在表 2-2 的例子中，个体的任意一个子集关于性别这个属性来说概念上可能是含糊的，如集合 $X=\{R_2,R_3,R_4\}$。而这种论域子集关于属性子集的概念上的含糊性可以通过定义 2-4 来计算。

讨论一个粗糙集包含哪些元素的问题，会引出不确定性问题。因此如果元素隶属于粗糙集问题有了描述的方法，也就有了描述不确定性的方法。在粗糙集理论中，元素隶属于粗糙集的程度用隶属函数来描述。如果元素在 $B\_(X)$ 中，其隶属函数值为 1；如果在边界区域，为 1/2；如果不在 $B^{-}(X)$ 中，为 0。

4．*应用*

由于粗糙集理论能够描述数据库中的含糊性和不确定性问题，因此为数据采掘和知识发

现提供了有效的工具。这种理论在信息系统中属性依赖关系的发掘、冗余的消除及概念的获取中具有很大的应用价值。

2.6　小结

本章就模糊集合、模糊关系、模糊推理的基本概念、基本原理和基本方法进行了讨论，并给出了模糊计算在工程技术中 3 个方面的应用实例。最后简要介绍了粗糙集方法。

习题 2

1．模糊控制的特点是什么？
2．试说明模糊集合与经典集合的主要区别。
3．模糊控制的应用领域有哪些？
4．简要说明模糊控制系统的工作原理。
5．如何建立模糊控制规则？
6．设论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$A$ 及 B 为论域 U 上的两个模糊集，已知

$$A=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0.6}{x_4}+\frac{1}{x_5}$$

$$B=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{0.3}{x_5}$$

试计算：$A\cap B$，$A\cup B$，A^c，$A\cup B^c$，$A\cdot B$，$A\circ B$。

7．设论域$X=Y=\{1,2,3,4,5\}$，以下为X、Y上的模糊集合

$$A=\text{“小”}=\frac{1}{1}+\frac{0.6}{2}+\frac{0.4}{3}$$

$$B=\text{“大”}=\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}$$

$$A'=\text{“较小”}=\frac{1}{1}+\frac{0.4}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.1}{4}$$

设 $A=$“小”　则 $B=$“大”，已知 $A'=$“较小”，问 B' 如何？

8．设论域$X=Y=\{1,2,3,4,5\}$，A_1、B_1、A_2、B_2 为 X、Y 上的模糊集合，其中

$$A_1=\frac{0.3}{1}+\frac{0.6}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.9}{5}$$

$$B_1=\frac{0.6}{2}+\frac{0.9}{3}+\frac{0.2}{4}$$

$$A_2=\frac{0.1}{1}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.7}{4}+\frac{0.8}{5}$$

$$B_2=\frac{0.4}{1}+\frac{0.6}{2}+\frac{0.7}{5}$$

试计算 Mamdani 模糊蕴涵关系 R。

9．已知存在模糊向量 $\boldsymbol{A}$ 和模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 如下：

$$\boldsymbol{A} = (0.8 \quad 0.2 \quad 0.6)$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

计算 $B = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{R}$ 。

10．实时控制，基本模糊控制器要经过哪些运算求得精确控制量？

11．试简述模糊控制在电饭锅应用中的原理。