

## 第4章 结构的位移计算

本章简要论述了结构位移的分类及位移计算，并根据虚功原理建立了结构位移计算的一般公式。针对由于荷载、温度变化、支座位移等各种不同因素产生的结构位移，给出了各种特殊情况下的位移计算简化公式。图乘法是结构位移计算公式中使用的一个简便、有效、实用的计算方法，应用此方法，可使复杂的计算得以简化。本章所建立的互等定理是后面几章学习的基础。本章的重点是如何分析结构的位移，并利用图乘法准确、快捷地计算结构的指定位移。

### 4.1 概述

#### 4.1.1 结构位移的概念

任何结构都是由可变形固体材料组成的，在外部因素的作用下都会产生变形和位移。变形是指结构原有形状的变化。位移是指某点位置或某截面位置和方位的移动，位移包括线位移和角位移两种。线位移是指结构上某点沿直线方向相对于原位置移动的距离，结构上两点之间沿两点连线方向相对位置的改变量，称为相对线位移；角位移是指杆件某截面相对于原位置转动的角度，结构上两个截面相对转动的角度称为相对角位移。

图 4-1 (a) 所示刚架在荷载作用下发生如虚线所示的变形，截面 A 的形心从 A 点移动到了 A' 点，线段 AA' 称为 A 点的线位移，记为  $\Delta_A$ ，用水平线位移  $\Delta_{Ax}$  和竖向线位移  $\Delta_{Ay}$  两个分量来表示（图 4-1 (b)）。同时截面 A 所转动的角度称为截面 A 的角位移，用  $\theta_A$  表示。又如图 4-1 (c) 所示刚架，在荷载作用下发生如虚线所示变形，截面 A 发生了  $\theta_A$  的角位移。同时截面 B 发生了  $\theta_B$  的角位移，这两个截面方向相反的角位移之和称为截面 A、B 的相对角位移，即  $\theta_{AB} = \theta_A + \theta_B$ 。同理，C、D 两点的水平线位移分别为  $\Delta_C$ 、 $\Delta_D$ ，这两个指向相反的水平位移之和称为 C、D 两点的水平相对线位移，即  $\Delta_{CD} = \Delta_C + \Delta_D$ 。

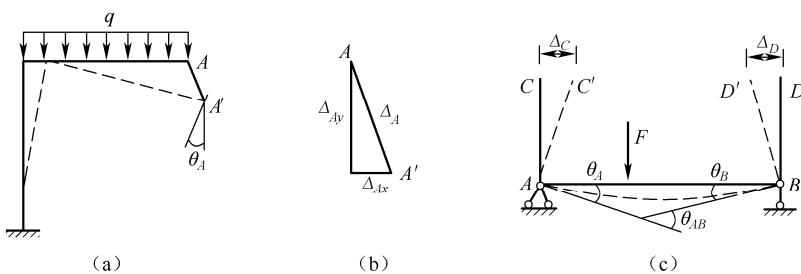


图 4-1 刚架变形

#### 4.1.2 结构位移产生的原因

使结构产生位移的外界因素主要有：

##### 1. 荷载

结构在荷载作用下产生内力，则材料发生应变，从而使结构产生位移。

## 2. 温度变化

当结构受到温度变化的影响时，材料根据热胀冷缩的原理，会产生位移。

## 3. 支座位移

当地基发生沉降时，结构的支座会产生移动及转动，从而使结构产生位移。

## 4. 制造误差

由于结构构件尺寸的原始制造误差，使得结构在组装时产生位移。

另外，其他如材料的干缩等原因也会使结构产生位移。

### 4.1.3 计算结构位移的目的

结构位移计算在工程上具有重要意义。

#### 1. 校核结构的刚度

在结构设计中，除了应满足结构的强度要求外，还需满足结构的刚度要求。结构在荷载作用下如果变形太大，即使不破坏也不能正常使用。因此，在结构设计时，要计算结构的位移，控制结构变形不超过规范规定的容许值，这一计算过程称为刚度验算。如屋盖和楼盖梁的挠度容许值为梁跨度的 $\frac{1}{200} \sim \frac{1}{400}$ ，而吊车梁的挠度容许值规定为梁跨度的 $\frac{1}{600}$ ；又如铁路桥涵设计规范规定，在竖向静荷载作用下桥梁的最大挠度，简支钢板梁不得超过跨度的 $\frac{1}{800}$ ，简支钢桁梁不得超过跨度的 $\frac{1}{900}$ 。

#### 2. 计算超静定结构

在计算超静定结构的反力和内力时，由于结构未知力的个数超过了静力平衡方程的数目，需根据变形协调条件建立补充方程，则必须计算结构的位移。

#### 3. 保证施工过程

在结构的施工过程中，为确保施工安全和拼装就位，也常常需要知道结构的位移情况。例如图 4-2 所示三孔钢桁梁的拼装，在梁的自重、临时轨道、吊机等荷载作用下，悬臂部分将下垂而发生竖向位移  $f_A$ 。若  $f_A$  过大，则吊机容易滚走，同时梁也不能按设计要求就位。因此，必须先行计算  $f_A$  的数值，以便采取相应措施，确保施工安全和拼装就位。

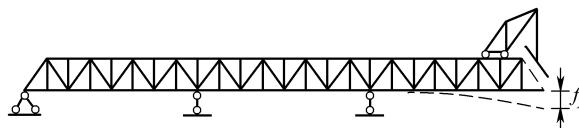


图 4-2 三孔钢桁梁

#### 4. 研究结构的振动和稳定

在结构的动力计算和稳定计算中，通常需要计算结构的位移。

### 4.1.4 结构位移计算的有关假设

在结构位移计算中，常采用一些基本假定以简化计算工作。

(1) 结构材料处于弹性工作阶段，服从胡克定律，即应力应变成线性关系。

(2) 结构满足小变形假设，在建立平衡方程时，仍然可用结构原有几何尺寸进行计算。

(3) 结构各部分之间为理想连接，不计摩擦阻力影响。

对于大多数实际工程结构，按照上述假定计算的结果具有足够的精确度。

满足上述条件的理想化结构体系，其位移与荷载之间为线性关系，称为线性变形体系，其位移计算可以应用叠加原理。

## 4.2 变形体的虚功原理

### 4.2.1 虚功

#### 1. 功和虚功

常力所作的功定义为该力的大小与其作用点沿力方向相应位移的乘积。

若力在自身引起的位移上作功，所作的功称为实功；若力在彼此无关的位移上作功，所作的功称为虚功。虚功有两种情况：其一，在作功的力与位移中，有一个是虚设的；其二，力与位移两者均是实际存在的，但彼此无关。

#### 2. 广义力和广义位移

一般情况下，虚功也可以表示成

$$W = F_p \Delta \quad (4-1)$$

式中  $W$  为虚功，单位为  $\text{N}\cdot\text{m}$ ， $F_p$  为广义力， $\Delta$  为广义位移。

如果  $F_p$  是一个力，相应的  $\Delta$  为沿这个力作用线方向的线位移；如果  $F_p$  是一个力偶，相应的  $\Delta$  为沿力偶作用方向的角位移；如果一组力经历相应的位移作功，则一组力可以用一个符号  $F_p$  表示，相应的位移也可用一个符号  $\Delta$  表示，这种扩大的力和位移分别称为广义力和广义位移。

在图 4-3 (a) 中，简支梁在  $C$  点作用一竖向力  $F_p$ ，让它经历图 4-3 (c) 所示的位移作功，相应的位移  $\Delta$  则是在  $C$  点沿  $F_p$  力作用方向的线位移（图 4-3 (c)）；在图 4-3 (b) 中，简支梁在  $B$  端作用一个力偶  $M$ ，让它经历图 4-4 (c) 所示的位移作功，相应的位移  $\Delta$  则是沿  $M$  作用方向的  $B$  端截面的转角  $\theta$ （图 4-3 (c)）；在图 4-3 (a)、(b) 左图中一对方向相反的力  $F_{p1}$  和  $F_{p2}$  ( $F_{p1} = F_{p2} = F_p$ )，构成广义力  $F_p$ ，则相应的广义位移  $\Delta$  为刚架在  $A$  点和  $B$  点沿力方向的位移之和  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ （图 4-4 (a)、(b) 右图）。类似地，如果广义力  $F_p$  是一对力偶，则相应的广义位移  $\Delta$  为沿这一对力偶作用方向的角位移之和。如图 4-4 (c) 所示， $M_1$  和  $M_2$  ( $M_1 = M_2 = M$ ) 是广义力，则相应的广义位移为刚架铰  $C$  左、右两侧截面沿力偶方向的转角  $\theta_1$  和  $\theta_2$  之和，即铰  $C$  左、右两侧截面的相对转角。

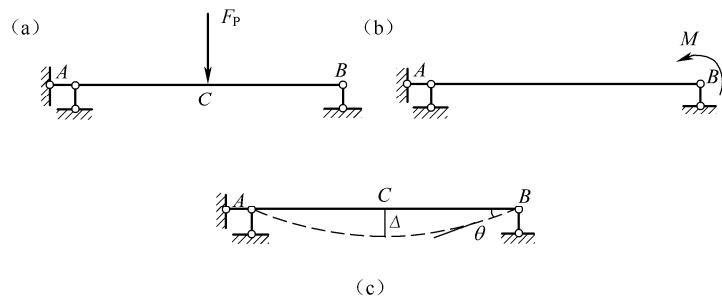
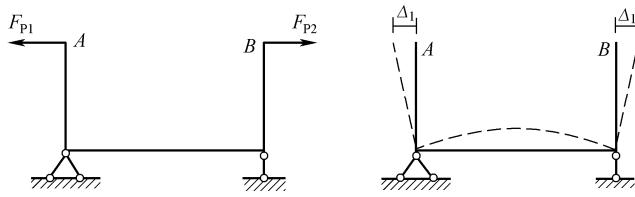
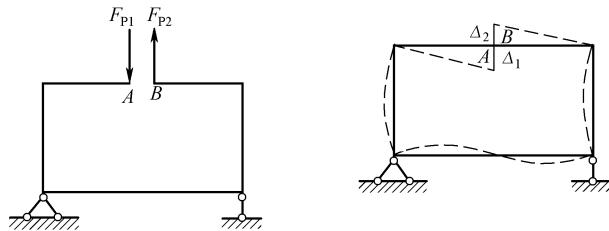


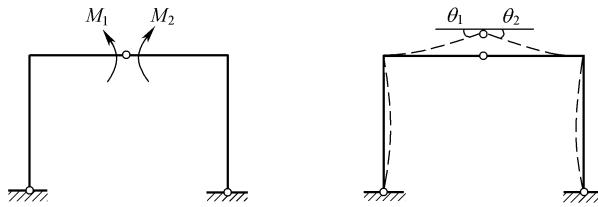
图 4-3 力和相应的位移



(a) A、B 两点一对方向相反的水平力, A、B 两点的水平相对位移



(b) A、B 两点一对方向相反的竖向力, A、B 两点的竖向相对位移



(c) A、B 两截面处一对方向相反的力偶, A、B 两截面的相对转角

图 4-4 广义力和广义位移

#### 4.2.2 刚体的虚功原理

##### 1. 刚体虚功原理

当结构体系在位移过程中不考虑材料应变, 各杆只发生刚体运动, 此体系属于刚体体系。

刚体的虚功原理可表述为: 刚体处于平衡的必要和充分条件是, 对于符合刚体约束情况的任意微小刚体位移, 刚体上所有外力所作的虚功总和等于零。

刚体系的虚功原理可表述为: 刚体系处于平衡的必要和充分条件是, 对于符合刚体系约束情况的任意微小刚体位移, 刚体系上所有外力所作的虚功总和等于零。即有

$$W = 0 \quad (4-2)$$

如图 4-5 (a) 中表示简支梁上作用的一组平衡力系 (包括荷载和约束反力), 图 4-6 (b) 表示简支梁由于支座沉陷而产生的刚体位移。图 4-5 (a) 和图 4-5 (b) 是两个彼此无关的状态, 根据虚功原理 (4-2) 式, 得

$$W = F_{p1}\Delta_1 + F_{p2}\Delta_2 + F_{Ay1}c_1 + F_{Ay2}c_2 = 0$$

对一般情况, 式 (4-2) 的具体表达式为

$$\sum F_{pi}\Delta_i + \sum F_{Ayk}c_k = 0 \quad (4-3)$$

式中,  $F_{pi}$  为体系所受的荷载;  $F_{Ayk}$  为体系的约束反力;  $\Delta_i$  为与  $F_{pi}$  相应的位移,  $\Delta_i$  与力  $F_{pi}$  方向一致时, 乘积  $F_{pi}\Delta_i$  为正;  $c_k$  为与  $F_{Ayk}$  相应的位移,  $c_k$  与力  $F_{Ayk}$  方向一致时, 乘积

$F_{Ayk}c_k$  为正。

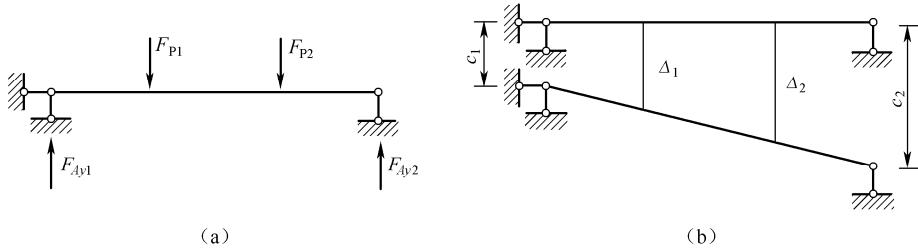


图 4-5 虚功原理

## 2. 刚体虚功原理的应用

虚功原理中的平衡力系与可能位移是两个彼此无关的状态，因此既可以把位移看作是虚设的，也可以把力系看作是虚设的。根据虚设对象的不同选择，虚功原理主要有两种应用形式，用来解决两类问题。第一种是对于一给定的平衡力系状态，利用虚设的可能位移状态求未知力，也称为虚位移原理；第二种是对于一给定的位移状态，利用虚设的平衡力系求未知位移，也称为虚力原理。

### (1) 虚位移原理。

图 4-6 (a) 所示为一伸臂梁，在  $F_p$  作用下求  $A$  支座反力  $F_{Ay}$ 。

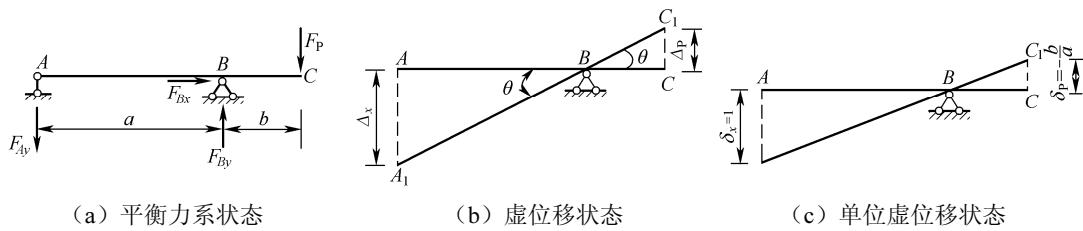


图 4-6 伸臂梁

为应用虚功原理，应使梁发生刚体位移，于是，将与拟求支座反力  $F_{Ay}$  相应的约束撤除，代以相应的力  $F_{Ay}$ （这时的  $F_{Ay}$  已是主动力）， $ABC$  刚片可以绕铰支座  $B$  作自由转动， $A$  位移到  $A_1$ ， $C$  位移到  $C_1$ ，得到一虚设的可能位移状态，如图 4-6 (b) 所示。

图 4-6 (a) 所示的力系，在外力  $F_p$  作用下，与支座反力  $F_{Ay}$ 、 $F_{By}$ 、 $F_{Bx}$  维持平衡，即图 4-7 (a) 给出了一组平衡力系状态。

图 4-6 (a) 给定的平衡力系状态在图 4-6 (b) 的虚位移状态下作虚功，建立体系的虚功方程。可得

$$F_{Ay}\Delta_x + F_p\Delta_p = 0 \quad (4-4)$$

其中， $\Delta_x$  和  $\Delta_p$  分别是沿  $F_{Ay}$  和  $F_p$  作用的虚位移，且  $\Delta_x$  与  $F_{Ay}$  方向一致，取正号； $\Delta_p$  与  $F_p$  方向相反，取负号。由几何关系可知

$$\Delta_x = a\theta \quad \Delta_p = -b\theta$$

$$\text{则} \quad \frac{\Delta_p}{\Delta_x} = -\frac{b}{a} \quad (a)$$

将式 (a) 代入式 (4-4) 得

$$F_{Ay}\Delta_x - F_p \frac{b}{a} \Delta_p = 0$$

即

$$F_{Ay} - F_p \frac{b}{a} = 0 \quad (b)$$

$$F_{Ay} = F_p \frac{b}{a} \quad (c)$$

由式 (a) 可以看出  $\frac{\Delta_p}{\Delta_x}$  比值不随  $\Delta_x$  的大小而改变。因此，为计算方便，可虚设  $F_{Ay}$  方向的位移为单位位移 (图 4-6 (c))，即令  $\delta_x = 1$ ， $\Delta_p$  记为  $\delta_p$ 。

则有

$$\delta_p = -\frac{b}{a}$$

这时，虚功方程为

$$F_{Ay} \cdot 1 + F_p \cdot \delta_p = 0, \quad F_{Ay} = -F_p \delta_p = F_p \frac{b}{a}$$

所得结果为正，表明力  $F_{Ay}$  与所设方向相同，即向下。

**例题4-1** 求图4-7 (a) 所示伸臂梁跨中截面 D 的剪力  $F_x = F_{QD}$  相应的约束撤除，即将截面 D 左、右改为用两个平行于杆轴的平行链杆连接；在截面 D 处代之以一对大小相等方向相反的剪力  $F_x = F_{QD}$ ，这里  $F_x$  是一对广义力，如图4-7 (b) 所示，刚片 DBC 可以绕铰支座 B 作自由转动，D 位移到  $D_1$ ，C 位移到  $C_1$ ；因为 AD 刚片与 DBC 刚片是用两个平行于杆轴的链杆相连，位移后  $AD_2$  仍应与  $D_1BC_1$  平行，A 点因有竖向支杆竖向位移为零，故得到一虚设的可能位移状态，如图4-7 (c) 所示。令图4-7 (b) 所示的平衡力系在图4-7 (c) 的虚位移上作虚功，得虚功方程如下

$$F_x \Delta_x + F_p \Delta_p = 0$$

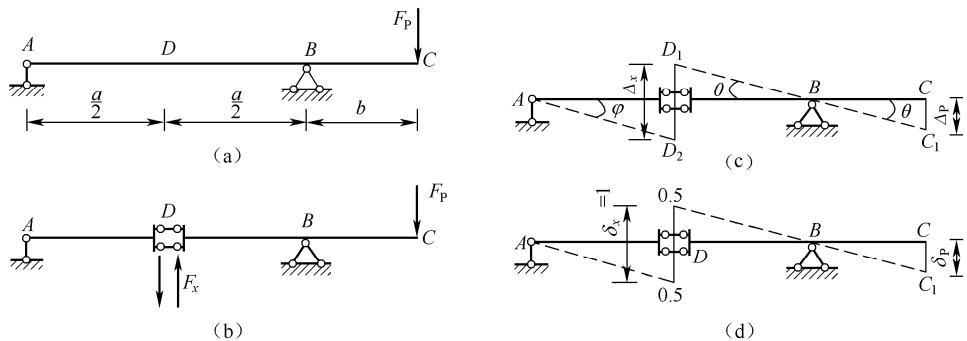


图 4-7 例题 4-1 图

这里， $\Delta_x$  是截面 D 左、右的相对错动，为广义位移。在图 4-7 (d) 中，令  $\delta_x = 1$ ，则由几何关系可得

$$\delta_p = \frac{b}{a}$$

虚功方程为

$$F_x \cdot 1 + F_p \cdot \delta_p = 0$$

得

$$F_x = F_{QD} = -F_p \frac{b}{a}$$

所得结果为负, 表明  $F_x = F_{QD}$  与所设方向相反, 即剪力为负。

以上这种求约束力和内力的方法, 也称为单位位移法。

由此, 可得应用虚功原理计算静定结构某一约束力  $F_x$  (包括支座反力或任一截面的内力) 的步骤如下:

①撤除与  $F_x$  相应的约束, 代以相应的约束力  $F_x$ ; 使原来的静定结构变为具有一个自由度的机构, 约束力  $F_x$  变为主动力  $F_x$ ,  $F_x$  与原来的力系维持平衡。

②使机构发生一刚体体系的可能位移, 沿  $F_x$  正方向相应的位移为单位位移, 即  $\delta_x = 1$ , 与荷载  $F_p$  相应的位移为  $\delta_p$ , 得到一虚位移状态。

③在平衡力系和虚位移之间建立虚功方程

$$F_x \cdot 1 + \sum F_p \cdot \delta_p = 0$$

④求出单位位移  $\delta_x = 1$  与  $\delta_p$  之间的几何关系, 代入虚功方程, 得到

$$F_x = -\sum F_p \delta_p$$

这里, 关键的步骤是撤去与拟求约束力相应的约束, 并在拟求约束力正方向虚设单位位移, 正确地画出虚位移图, 用几何关系求出  $\delta_p$ 。

**例题 4-2** 利用虚功原理求图 4-8 (a) 所示静定多跨梁的支座反力  $F_{C_y}$  和截面  $G$  处的弯矩  $M_G$ 。

**解** 首先求支座反力  $F_{C_y}$ 。

①撤去支座  $C$  的竖直支柱, 代以相应的支座反力  $F_x$ , 得到图 4-8 (b) 所示的机构。

②令此机构沿  $F_x$  正方向发生单位位移, 即  $\delta_x = 1$ , 得到刚体体系的虚位移图, 如图 4-8 (c) 所示。

根据刚体体系的虚位移图, 可得到几何关系

$$\delta_{p1} = -3, \quad \delta_{p2} = 1.5$$

这里,  $\delta_{p1}$  方向与  $F_{p1}$  方向相反, 应为负值。

③建立虚功方程

$$F_x \cdot 1 + F_{p1} \delta_{p1} + F_{p2} \delta_{p2} = 0$$

④将几何关系代入, 得

$$F_{C_y} = F_x = -2F \times (-3) - F \times 1.5 = 4.5F$$

然后求截面  $G$  的弯矩  $M_G$ 。

①撤除与弯矩  $M_G$  相应的约束, 即将截面  $G$  由刚结改为铰结, 并代以一对大小相等、方向相反的力偶  $M_x$ 。所得机构为图 4-8 (d) 所示。

②令此机构在  $M_x$  正方向发生相对单位转角, 即  $\delta_x = 1$ , 得到刚体体系的虚位移图如图 4-8 (e) 所示。由几何关系可得

$$\delta_{p1} = -4a, \quad \delta_{p2} = 2a$$

③虚功方程为

$$M_x \cdot 1 + F_{p1} \delta_{p1} + F_{p2} \delta_{p2} = 0$$

④将几何关系代入, 得

$$M_x \cdot 1 + 2F \cdot (-4a) + F \cdot 2a = 0$$

得

$$M_G = M_x = 6Fa$$

例题 4-3 试求图 4-9 (a) 所示桁架 FG 杆的未知力  $F_x$ 。

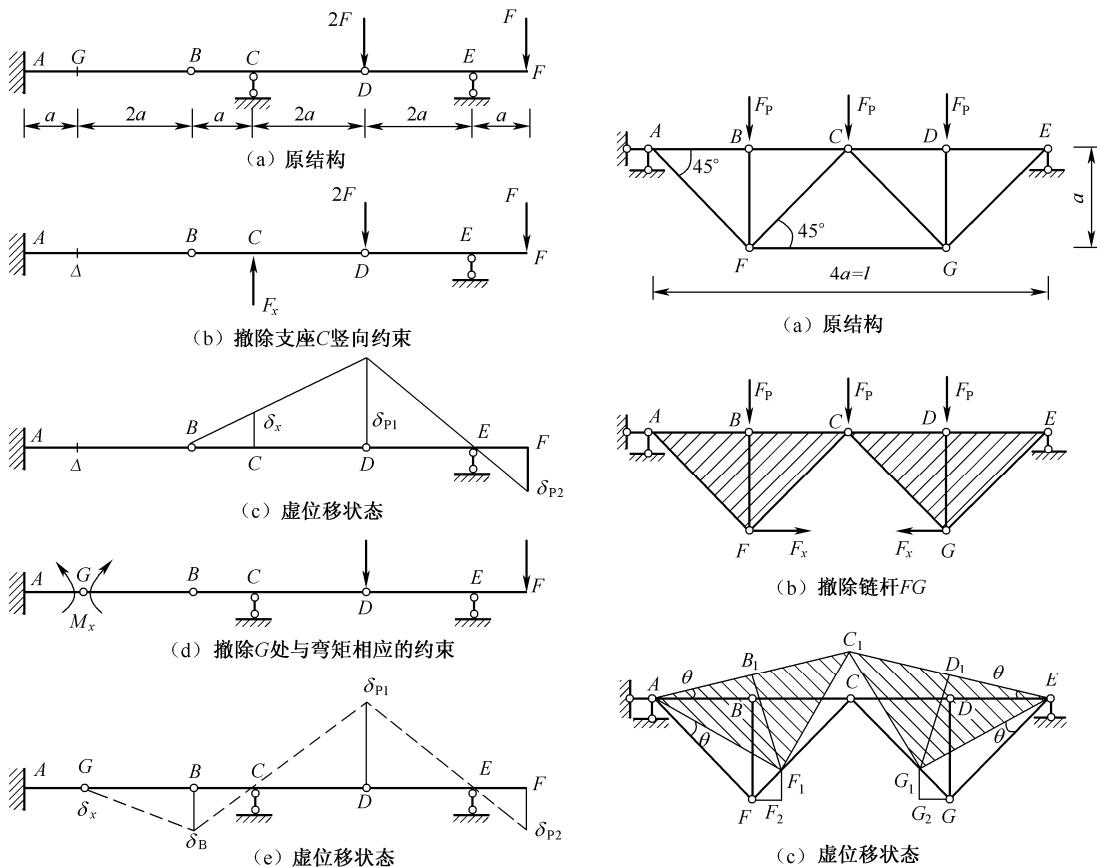


图 4-8 例题 4-2 图

图 4-9 例题 4-3 图

解 ①撤除链杆  $FG$ ，代以轴力  $F_x$ 。原来的桁架变成有两个刚片  $ACF$  与  $ECG$  在  $C$  点用铰相连而组成的机构，如图 4-9 (b) 所示。

②取虚位移如图 4-9 (c) 所示。设两个刚片分别绕  $A$  点和  $E$  点的转角为  $\theta$ ，则荷载作用点  $B$ 、 $C$ 、 $D$  处的竖向位移

$$\Delta_B = \Delta_D = -\theta a, \quad \Delta_C = -2\theta a$$

$F$  点的总位移为

$$\overline{FF_1} = \overline{AF} \cdot \theta = \sqrt{2}a \cdot \theta$$

水平位移分量为

$$\overline{FF_2} = \overline{FF_1} \cos 45^\circ = a\theta$$

同理  $G$  点的水平位移分量为

$$\overline{GG_2} = a\theta$$

则  $F$  和  $G$  两点的相对水平位移为

$$a\theta + a\theta = 2a\theta$$

③令图 4-9 (b) 中的主动力在图 4-9 (c) 所示虚位移上做功，虚功方程为

$$F_x(2a\theta) + F_p(-a\theta - 2a\theta - a\theta) = 0$$

得

$$F_x = 2F_p$$

(2) 虚力原理。

图4-10 (a) 所示一伸臂梁, 支座A向下移动距离为 $c_1$ , 现在拟求C点竖向位移 $\Delta$ 。

图4-10 (a) 所示位移状态是给定的, 为了应用虚功原理, 应该虚设一平衡力系。为了能在C点竖向位移上做虚功, 即与拟求的C点竖向位移相对应, 在C点加一竖向力 $F_p$ , 支座A的反力为 $F_p \frac{b}{a}$ 。 $F_p$ 与相应的支座反力组成一个平衡力系, 如图4-10 (b) 所示, 这是一个虚设的力系状态。

令图4-10 (b) 的虚设平衡力系在图4-10 (a) 的刚体位移上作虚功, 可得虚功方程

$$F_p \Delta + F_{Ay} c_1 = 0 \quad (a)$$

$$F_p \Delta + F_p \frac{b}{a} c_1 = 0 \quad \Delta = -\frac{b}{a} c_1 \quad (b)$$

由式 (b) 可以看出,  $\Delta$  与  $F_p$  无关。为计算简便, 可在虚设力系中令  $F_p = 1$  (图4-10 (c))。可直接得到虚功方程

$$\Delta + \frac{b}{a} c_1 = 0 \quad \Delta = -\frac{b}{a} c_1$$

$\Delta$  为负值, 说明  $\Delta$  的方向与  $F_p$  方向相反, 应该向上, 如图 4-10 (a) 虚线所示。

可见, 在虚设力系与给定位移之间应用虚功原理, 可以求得位移。这里, 关键步骤是在拟求位移方向加单位力  $F_p = 1$ , 用这样一个虚设的单位平衡力系与给定位移建立虚功方程, 求得位移。这个方法也称为单位荷载法。

#### 4.2.3 变形体的虚功原理

当结构体系在变形过程中, 不但各杆发生刚体运动, 内部材料同时也产生应变, 体系属于变形体系。

变形体系的虚功原理可表述为: 变形体系处于平衡的必要和充分条件是, 对于符合变形体系约束条件的任意微小的可能位移(虚位移), 变形体系上所有外力所作的虚功总和等于各微段上的内力在其可能变形上所作的虚功总和。

下面从物理概念上简要说明上述原理的正确性。

图 4-11 (a) 表示一平面杆件结构在力系作用下处于平衡状态, 称为力状态, 图 4-11 (b) 表示该结构由于另外原因而产生的虚位移状态, 称为位移状态。现从图 4-11 (a) 中取出任一微段来研究, 作用在该微段上的力为外力  $q$  和截面上的内力(轴力、弯矩和剪力)。此微段在图 4-11 (b) 中由  $ABCD$  移到了  $A'B'C'D'$ , 于是作用在微段上的各力将在相应的位移上作虚功。把所有微段的虚功总和加起来, 便是整个结构的虚功。

##### 1. 按外力虚功与内力虚功计算结构总虚功

设作用于微段上所有各力所作虚功总和为  $dW$ , 它可以分为两部分: 一部分是外力所作的

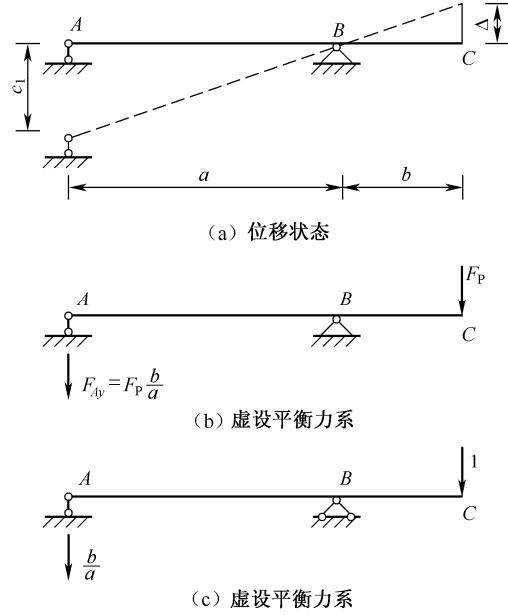


图 4-10 伸臂梁

功  $dW_e$ ，另一部分是截面上的内力所作的功  $dW_i$ ，即

$$dW = dW_e + dW_i$$

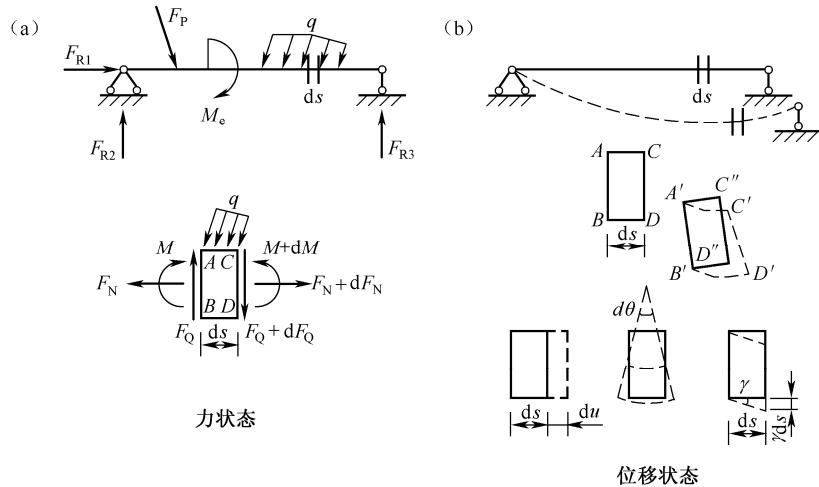


图 4-11 简支梁

沿杆段积分求总和，得整个结构的虚功为

$$\sum dW = \sum dW_e + \sum dW_i$$

或简写为

$$W = W_e + W_i$$

其中， $W_e$ 是整个结构的所有外力（包括荷载和支座反力）所作虚功总和，即外力虚功； $W_i$ 是所有微段截面上的内力所作虚功总和。

由于任何相邻截面上的内力互为作用力与反作用力，它们大小相等方向相反，且具有相同位移，因此每一对相邻截面上的内力虚功总是互相抵消。

由此有

$$W_i = 0$$

于是整个结构的总虚功便等于外力虚功

$$W = W_e \quad (a)$$

## 2. 按刚体虚功与变形虚功计算结构总虚功

将如图4-11 (b) 中所示微段的虚位移分解为两步，第一步仅发生刚体位移（由  $ABCD$  移到了  $A'B'C'D''$ ），然后再发生第二步变形位移（截面  $A'B'$  不动，  $C''D'$  移到  $C'D'$ ）。

作用在微段上的所有力在微段刚体位移上所作虚功为  $dW_Q$ ，由于微段上的所有力（包括微段表面的外力及截面上的内力）构成一平衡力系，微段处于平衡状态，故由刚体的虚功原理可知， $dW_Q = 0$ 。

作用在微段上的所有力在微段变形位移上所作虚功为  $dW_V$ ，由于当微段发生变形位移时，仅其两侧面有相对位移，故只有作用在两侧面上的内力作功，而外力不作功， $dW_V$  实质是内力在变形位移上所做虚功。

微段总的虚功为

$$dW = dW_Q + dW_V$$

沿杆段积分求和, 得整个结构的虚功为

$$\sum \int dW = \sum \int dW_Q + \sum \int dW_V$$

或简写为

$$W = W_Q + W_V$$

由于  $dW_Q = 0$ ,  $W_Q = 0$ , 则有

$$W = W_V \quad (b)$$

比较 (a)、(b) 式可得

$$W = W_e = W_V$$

此即为变形体系的虚功原理。

下面讨论  $W_V$  的计算。

对于平面杆系结构, 微段的变形可以分为轴向变形  $du$ 、弯曲变形  $d\theta$  和剪切变形  $\gamma ds$ 。不难看出, 微段上的外力无对应的位移因而不作功, 而微段上轴力、弯矩和剪力的增量  $dF_N$ 、 $dM$  和  $dF_Q$  在这些变形上所作虚功为高阶微量故可略去不计, 因此微段上各力在其变形上所作的虚功可写为

$$dW_V = F_N du + M d\theta + F_Q \gamma ds$$

对于整个结构有

$$W_V = \sum \int dW_V = \sum \int F_N du + \sum \int M d\theta + \sum \int F_Q \gamma ds$$

或

$$W = \sum \int F_N du + \sum \int M d\theta + \sum \int F_Q \gamma ds \quad (4-5)$$

注意上面的讨论过程中, 并没有涉及到材料的物理性质, 因此无论对于弹性、非弹性、线性、非线性的变形体系, 虚功原理都适用。

### 4.3 计算结构位移的一般公式——单位荷载法

如图 4-12 (a) 所示为静定的线性弹性平面刚架, 受图示荷载作用后, 产生了如图中虚线所示的变形曲线 (或称为弹性曲线), 这一状态称为位移状态或实际状态, 为求此状态的位移, 需按所求位移相对应地虚设一个力状态。若求图 4-12 (a) 所示刚架  $K$  点沿  $k-k$  方向的位移  $\Delta_K$ , 根据前面建立的变形体系虚功原理, 虚设如图 4-12 (b) 所示刚架的力状态, 即在刚架  $K$  点沿拟求位移方向虚加一个集中力  $F_K$ , 为使计算简便令  $F_K = 1$ , 此状态也称虚拟状态。

为求外力虚功, 在位移状态中给出了实际位移  $\Delta_K$ 、 $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$ , 在力状态中可根据  $F_K = 1$  求出支座反力  $\bar{F}_{R1}$ 、 $\bar{F}_{R2}$ 、 $\bar{F}_{R3}$ , 外力虚功为

$$\begin{aligned} W &= F_K \Delta_K + \bar{F}_{R1} C_1 + \bar{F}_{R2} C_2 + \bar{F}_{R3} C_3 \\ &= 1 \times \Delta_K + \sum \bar{F}_R C \end{aligned}$$

为求变形虚功, 取任一微段  $ds$ , 在位移状态中微段的变形位移分别为  $du$ 、 $d\theta$  和  $\gamma ds$ , 在力状态中, 根据  $F_K = 1$  的作用可求出微段上的内力分别为  $\bar{F}_N$ 、 $\bar{M}$  和  $\bar{F}_Q$ , 变形虚功为

$$dW_V = \bar{F}_N du + \bar{M} d\theta + \bar{F}_Q \gamma ds$$

整个结构的变形虚功为

$$W_v = \sum \int \bar{F}_N \, du + \sum \int \bar{M} \, d\theta + \sum \int \bar{F}_Q \gamma \, ds$$

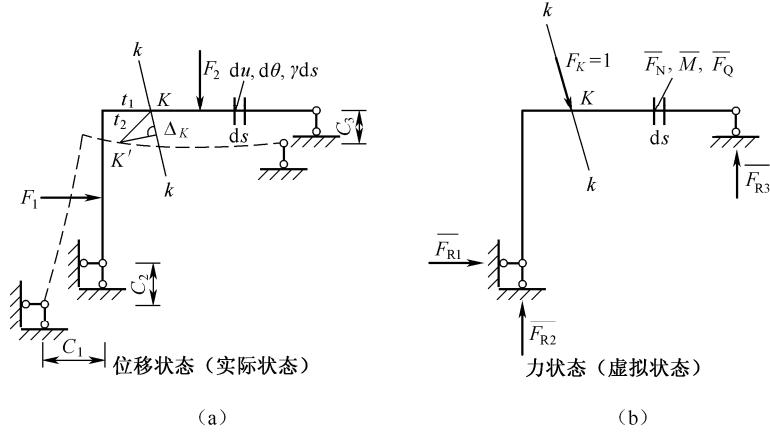


图 4-12 刚架位移和力状态图

由虚功原理  $W = W_v$  有

$$1 \times \Delta_K + \sum \bar{F}_R C = \sum \int \bar{F}_N \, du + \sum \int \bar{M} \, d\theta + \sum \int \bar{F}_Q \gamma \, ds$$

即

$$\Delta_K = -\sum \bar{F}_R C + \sum \int \bar{F}_N \, du + \sum \int \bar{M} \, d\theta + \sum \int \bar{F}_Q \gamma \, ds$$

如果确定了虚拟力状态, 其反力  $\bar{F}_R$  和微段上的内力  $\bar{F}_N$ 、 $\bar{M}$  和  $\bar{F}_Q$  可求, 同时若已知了实际位移状态支座的位移  $C$ , 并可求解微段的变形位移  $du$ 、 $d\theta$  和  $\gamma ds$ , 则位移  $\Delta_K$  可由上式求得。若计算结果为正, 表示单位荷载所做虚功为正, 即所求位移  $\Delta_K$  的方向与单位荷载  $F_k = 1$  的指向相同, 为负则相反。

在实际问题中, 除了计算线位移外, 还需要计算角位移、相对位移等。因此, 如何按照所求位移的不同类型设置相应的虚拟状态 (单位荷载) 是利用此方法计算位移的关键。

图 4-13 分别表示了为求解几种常见的广义位移所设置的单位荷载 (单位广义力)。

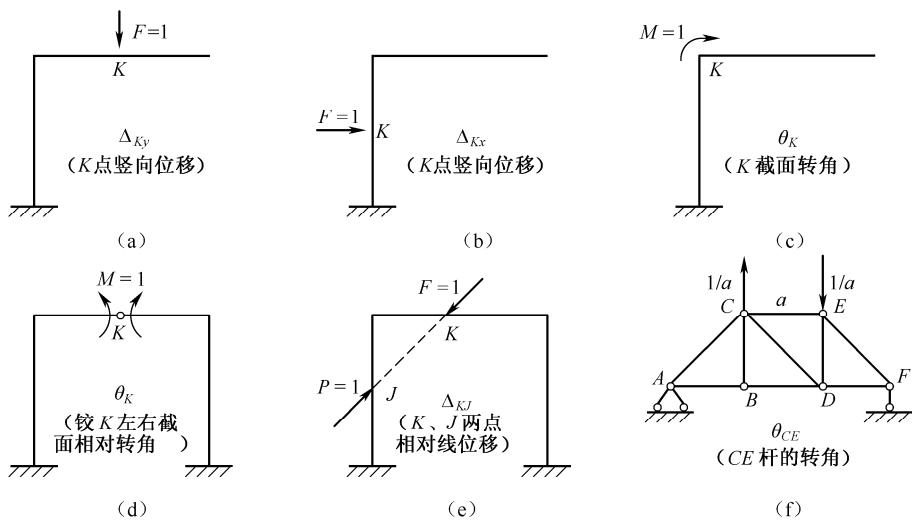


图 4-13 单位荷载的设置

## 4.4 静定结构在荷载作用下的位移计算

现在研究静定结构只在荷载作用（无支座移动）下的位移计算。这里的研究对象仅限于线弹性结构，即位移与荷载成线性关系，因而计算位移时荷载的影响可以叠加，而且当荷载全部撤除后位移也完全消失。该类结构的位移应是微小的，应力与应变的关系符合胡克定律。

设图 4-14 (a) 所示结构受到广义力的作用，求  $K$  点沿指定方向（如竖向）的位移  $\Delta_{KP}$ 。为清楚起见，位移  $\Delta_{KP}$  采用两个下标：第一个下标  $K$  表示该位移发生的地点和方向（ $K$  点沿指定方向）；第二个下标  $P$  表示引起该位移的原因（由广义力引起的）。

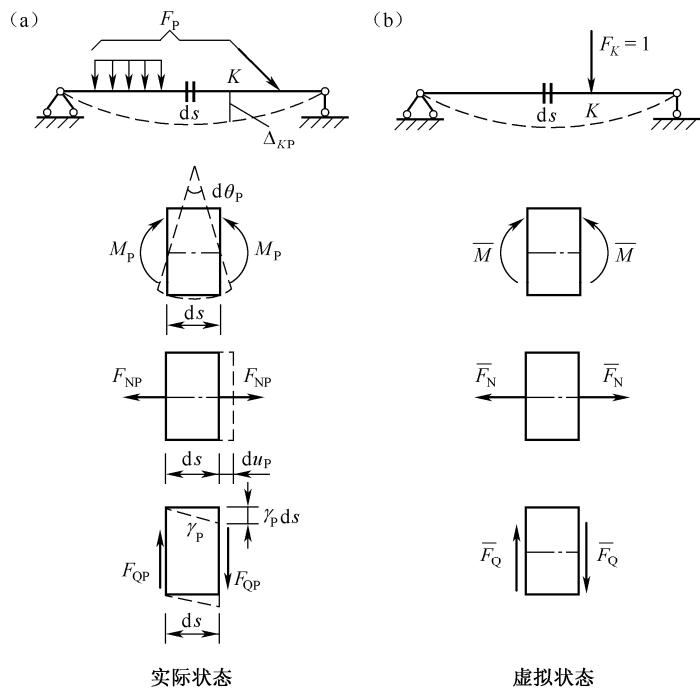


图 4-14 受广义力作用的结构

位移计算公式为

$$\Delta_{KP} = \sum \int \bar{M} d\theta_p + \sum \int \bar{F}_N du_p + \sum \int \bar{F}_Q \gamma_p ds \quad (a)$$

式中  $\bar{M}$ 、 $\bar{F}_N$ 、 $\bar{F}_Q$  为虚拟状态中微段上的内力（图 4-14 (b)）； $d\theta_p$ 、 $du_p$ 、 $\gamma_p ds$  是实际状态中微段的变形。若实际状态中微段上的内力为  $M_p$ 、 $F_{NP}$ 、 $F_{QP}$ ，根据材料力学知识，由  $M_p$ 、 $F_{NP}$  和  $F_{QP}$  分别引起微段的弯曲变形、轴向变形和剪切变形为

$$d\theta_p = \frac{M_p ds}{EI} \quad (b)$$

$$du_p = \frac{F_{NP} ds}{EA} \quad (c)$$

$$\gamma_p ds = \frac{kF_{QP} ds}{GA} \quad (d)$$

式中  $E$  为材料的弹性模量， $I$  和  $A$  分别为杆件截面二次矩（惯性矩）和面积， $G$  为材料的

切变模量； $k$  为切应力沿截面分布不均匀而引用的修正系数，其值与截面形状有关，对于矩形截面  $k = \frac{6}{5}$ ，圆形截面  $k = \frac{10}{9}$ ，薄壁圆环截面  $k = 2$ ，工字形截面  $k \approx \frac{A}{A'}$ ， $A'$  为腹板截面面积。

应该指出，上述微段变形的计算，只是对于直杆才是正确的，对于曲杆还需考虑曲率对变形的影响，不过在常用的小曲率杆结构中，其截面高度与曲率半径相比很小，曲率的影响可以略去不计。

将式 (b)、(c)、(d) 代入式 (a) 得

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_P ds}{EI} + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP} ds}{EA} + \sum \int \frac{k \bar{F}_Q F_{QP} ds}{GA} \quad (4-6)$$

此即为平面杆件结构在荷载作用下的位移计算公式。

式 (4-6) 右边三项分别代表结构的弯曲变形、轴向变形和剪切变形对所求位移的影响。在实际计算中，根据结构的具体情况，常常可以只考虑其中的一项（或两项）。

对于梁和刚架，位移主要是弯矩引起的，轴力和剪力的影响很小，一般可以略去，故式 (4-6) 可简化为

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_P ds}{EI} \quad (4-7)$$

在桁架中，因只有轴力作用，且同一杆件的轴力  $\bar{F}_N$ 、 $F_{NP}$  及  $EA$  沿杆长  $l$  均为常数，故式 (4-6) 成为

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP} ds}{EA} = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} \int ds = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA} \quad (4-8)$$

对于拱，当其轴力与压力线相近（两者的距离与拱截面高度为同一数量级）或者为扁平拱  $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$  时要考虑弯矩和轴力对位移的影响。

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_P ds}{EI} + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP} ds}{EA} \quad (4-9)$$

其他情况下一般只考虑轴力对位移的影响。

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP} ds}{EA} \quad (4-10)$$

对于组合结构，则对其中的受弯杆件可只计弯矩一项的影响，对链杆则只有轴力影响，故其位移计算公式可写为

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_P ds}{EI} + \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA} \quad (4-11)$$

最后，补充说明剪切变形中改正系数  $k$  的来源。在前面式 (a) 右边第三项中， $\bar{F}_Q \gamma_P ds$  是虚拟状态的剪力在实际状态微段的剪切变形上所作的虚功。由于虚拟及实际状态中切应力  $\bar{\tau}$  沿截面高度的非均匀分布（图 4-15 (a)），使其相应的切应变  $\gamma$  分布亦不均匀（图 4-15 (b)），所以上述微段上剪力所作的虚功为

$$\bar{F}_Q \gamma_P ds = \int_A \bar{\tau} dA \cdot \gamma ds = ds \int_A \bar{\tau} \cdot \gamma dA \quad (e)$$

由材料力学可知

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{F}_Q S}{Ib}, \quad \tau_P = \frac{F_{QP} S}{Ib} \text{ 及 } \gamma = \frac{\tau_P}{G} = \frac{F_{QP} S}{G I b}$$

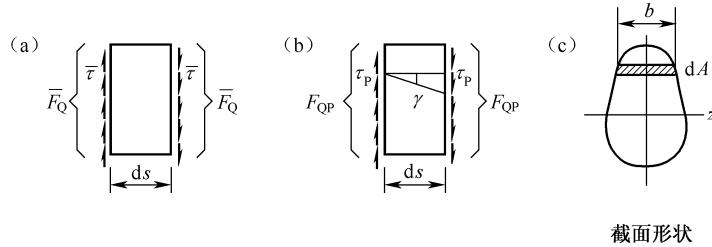
式中  $b$  为所求切应力处截面的宽度,  $S$  为该处以上 (或以下) 截面积对中性轴  $z$  的静矩 (图 4-15 (c))。代入式 (e), 就有

$$\bar{F}_Q \gamma_P ds = ds \int_A \frac{\bar{F}_Q F_{QP} S^2}{GI^2 b^2} = \frac{\bar{F}_Q F_{QP} ds}{GA} \cdot \frac{A}{I^2} \int \frac{S^2}{b^2} dA = \frac{k \bar{F}_Q F_{QP} ds}{GA} \quad (f)$$

式中

$$k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA \quad (g)$$

这就是切应力分布不均匀的修正系数, 它是一个只与截面形状有关的系数。



截面形状

图 4-15 受力图

荷载作用下位移计算的步骤为:

- (1) 沿拟求位移的位置和方向虚设相应的单位荷载;
- (2) 根据静力平衡条件, 求出在虚设单位荷载下结构的内力  $\bar{F}_N$ 、 $\bar{M}$  和  $\bar{F}_Q$ ;
- (3) 根据静力平衡条件, 计算在荷载作用下结构的内力  $F_{NP}$ 、 $M_P$  和  $F_{QP}$ ;
- (4) 代入位移计算公式 (4-6) 中计算位移。

**例题 4-4** 试求图 4-16 (a) 所示刚架  $A$  点的竖向位移  $\Delta_{Ay}$ 。各杆材料相同, 截面的  $I$ 、 $A$  均为常数。

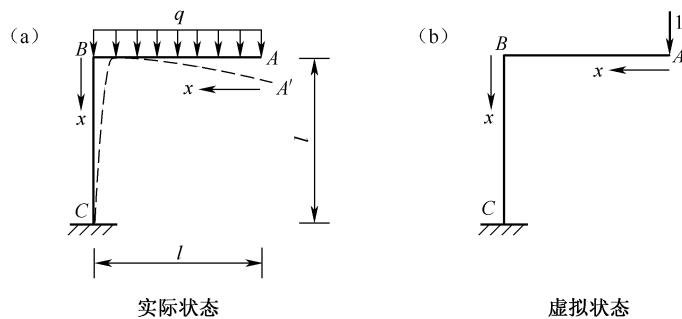


图 4-16 例题 4-4 图

**解** 在  $A$  点加一竖向单位荷载作为虚拟状态 (图 4-16 (b)), 并分别设各杆的  $x$  坐标如图所示, 则各杆内力方程为

$$AB \text{ 段: } \bar{M} = -x, \quad \bar{F}_N = 0, \quad \bar{F}_Q = 1$$

$$BC \text{ 段: } \bar{M} = -l, \quad \bar{F}_N = -1, \quad \bar{F}_Q = 0$$

在实际状态中 (图 4-16 (a)), 各杆内力方程为

$$AB \text{ 段: } M_P = -\frac{qx^2}{2}, \quad F_{NP} = 0, \quad F_{QP} = qx$$

$$BC \text{ 段: } M_P = -\frac{ql^2}{2}, \quad F_{NP} = -ql, \quad F_{QP} = 0$$

代入式 (4-6) 得

$$\Delta_{Ay} = \sum \int \frac{\bar{M}M_p ds}{EI} + \sum \int \frac{F_N F_{NP} ds}{EA} + \sum \int \frac{k \bar{F}_Q F_{QP} ds}{GA}$$

$$= \int_0^l (-x) \left( -\frac{qx^2}{2} \right) \frac{dx}{EI} + \int_0^l (-l) \left( -\frac{ql^2}{2} \right) \frac{dx}{EI} +$$

$$\int_0^l (-1)(-ql) \frac{dx}{EA} + \int_0^l k(+1)(qx) \frac{dx}{GA}$$

$$= \frac{5}{8} \frac{ql^4}{EI} + \frac{ql^2}{EA} + \frac{kql^2}{2GA} = \frac{5}{8} \frac{ql^4}{EI} \left( 1 + \frac{8}{5} \frac{I}{Al^2} + \frac{4}{5} \frac{kEI}{Gal^2} \right)$$

上式中, 第一项为弯矩的影响, 第二、三项分别为轴力和剪力的影响。若设杆件的截面为矩形, 其宽度为  $b$ 、高度为  $h$ , 则有  $A = bh$ ,  $I = \frac{bh^3}{12}$ ,  $k = \frac{6}{5}$ , 代入上式得

$$\Delta_{Ay} = \frac{5}{8} \frac{ql^4}{EI} \left[ 1 + \frac{2}{15} \left( \frac{h}{l} \right)^2 + \frac{2}{25} \frac{E}{G} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right]$$

可以看出,杆件截面高度与杆长之比  $h/l$  愈大,则轴力和剪力影响所占的比重愈大,反之,

影响较小, 可将其忽略。例如  $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ , 并取  $G = 0.4E$ , 可算得

$$\Delta_{Ay} = \frac{5}{8} \frac{ql^4}{EI} \left[ 1 + \frac{1}{750} + \frac{1}{500} \right]$$

可见，此时轴力和剪力的影响不大，通常可以略去。

例题 4-5 试计算如图 4-17 (a) 所示桁架结点 C 的竖向位移。各杆  $EA$  为同一常数。

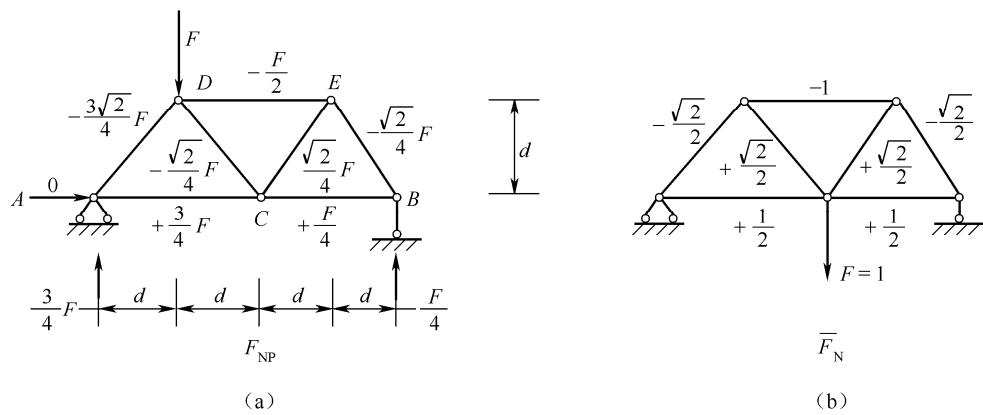


图 4-17 例题 4-5 图

解 实际位移状态如图 4-17 (a) 所示, 求得各杆内力  $F_{NP}$  并标于图上, 设虚拟单位力状态如图 4-17 (b) 所示, 求得各杆内力  $\bar{F}_N$  并标于图上, 代入式 (4-8), 有

$$\begin{aligned}
\Delta_{Cy} &= \frac{1}{EA} \sum \overline{F_N} F_{NP} l \\
&= \frac{1}{EA} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \left( -\frac{3\sqrt{2}}{4} F \right) \times (\sqrt{2}d) + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} F \right) \times (\sqrt{2}d) + \\
&\quad \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \left( \frac{\sqrt{2}}{4} F \right) \times (\sqrt{2}d) + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} F \right) \times (\sqrt{2}d) + (-1) \times \\
&\quad \left( -\frac{F}{2} \right) \times (2d) + \left( \frac{1}{2} \right) \times \left( \frac{3}{4} F \right) \times 2d + \left( \frac{1}{2} \right) \times \left( \frac{F}{4} \right) \times 2d \\
&= \frac{Fd}{EA} \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 2.71 \frac{Fd}{EA} (\downarrow)
\end{aligned}$$

## 4.5 图乘法

### 4.5.1 图乘法的计算公式

在利用位移公式计算梁、刚架在荷载作用下的位移时，要计算积分值

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\overline{M} M_p}{EI} ds$$

当结构的杆件数量较多或荷载情况比较复杂时，上述积分计算是比较麻烦的。通常可以使用比较简单的图乘法来代替积分运算，其前提是结构中的各杆段符合下列三个条件：

- (1) 杆轴是直线；
- (2) 杆段的弯曲刚度  $EI$  为常数；
- (3) 两个弯矩图  $\overline{M}$  和  $M_p$  中至少有一个是直线图形。

设等截面直杆  $AB$  段的两个弯矩图如图4-18所示，其中， $M_p$  图为任意形状， $\overline{M}$  图为直线变化，直线的倾角为  $\alpha$ 。

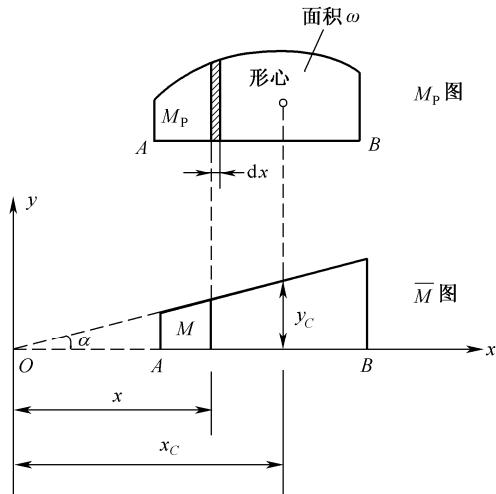


图 4-18 图乘法

为了推导图乘法的计算公式, 取坐标系如图 4-18 所示,  $x$  轴与  $\bar{M}$  图的基线  $AB$  重合,  $\bar{M}$  图的直线延长线与基线 ( $x$  轴) 的交点为原点, 其倾角为  $\alpha$ , 则  $\bar{M}$  图中坐标为  $x$  的任一点的纵坐标为  $\bar{M} = x \tan \alpha$ , 由于杆段的弯曲刚度  $EI$  为常数,  $ds = dx$ , 且  $\tan \alpha = \text{常数}$ , 则有

$$\int_A^B \frac{\bar{M} M_p}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_A^B \bar{M} M_p dx = \frac{\tan \alpha}{EI} \int_A^B x M_p dx \quad (a)$$

上式等号右边的积分项  $M_p dx$  是  $M_p$  图中在  $x$  处的微分面积 (图 4-19 中阴影线部分);  $x M_p dx$  是该微分面积对  $y$  轴的面积矩; 积分式  $\int_A^B x M_p dx$  则表示  $AB$  杆上所有微分面积对  $y$  轴面积矩之和。由面积矩定理, 它等于  $M_p$  图形的整个面积  $\omega$  对  $y$  轴的面积矩。若以  $x_C$  表示面积  $\omega$  的形心  $C$  至  $y$  轴的距离, 则有

$$\int_A^B x M_p dx = \omega x_C \quad (b)$$

将 (b) 式代入 (a) 式, 得

$$\int_A^B \frac{\bar{M} M_p}{EI} ds = \frac{\tan \alpha (\omega x_C)}{EI} = \frac{\omega y_C}{EI} \quad (c)$$

其中,  $y_C = x_C \tan \alpha$  代表  $M_p$  图形心  $C$  处对应于  $\bar{M}$  图中的纵坐标 (图 4-18)。

由此可见, 杆段只要符合前面所述的三个条件, 便可以用  $\frac{\omega y_C}{EI}$  代替积分运算  $\int_A^B \frac{\bar{M} M_p}{EI} ds$ ,

这种方法称为图乘法。

如果结构上所有各杆段均满足图乘法的三个条件, 则图乘法的位移计算公式为

$$\Delta_{KP} = \sum \int_A^B \frac{\bar{M} M_p}{EI} dx = \sum \frac{\omega y_C}{EI} \quad (4-12)$$

应用图乘法计算时应注意以下两点:

(1) 应用条件: 杆为直杆,  $EI$  为常数, 两个图形中至少有一个是沿着  $\omega$  的整个长度为一直线变化的图形, 纵坐标  $y_C$  取自该直线图中。

(2) 正负号规则: 面积  $\omega$  与纵坐标  $y_C$  在杆的同侧时, 乘积  $\omega y_C$  取正号; 否则取负号。

#### 4.5.2 图乘法的分段和叠加

进行图形相乘时, 需要计算某一图形的面积  $\omega$  和该图形的形心位置  $x_C$  及所对应的另一图形的纵坐标  $y_C$ 。图 4-19 给出了几种常用图形的面积及其形心位置。值得注意的是图中抛物线的顶点是指该点的切线平行于底边的点。

在应用图乘法时, 有些情况下应分段、叠加计算。

##### 1. 分段

(1) 若用来选取纵坐标  $y_C$  的图形是由几段直线组成的折线, 则应分段计算。

如图 4-20 (a)、(b) 所示的直线变化图形中, 沿杆的整个长度上由两根直线组成, 图乘时, 必须分两段进行计算, 然后相加。图 4-20 (a) 的图乘结果为  $\frac{1}{EI}(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2)$ ; 图 4-20

(b) 的图乘结果为  $\frac{1}{EI} \omega_1 y_1$ 。

(2) 杆件各段有不同的  $EI$ , 则应在  $EI$  变化处分段并按分段进行图乘。

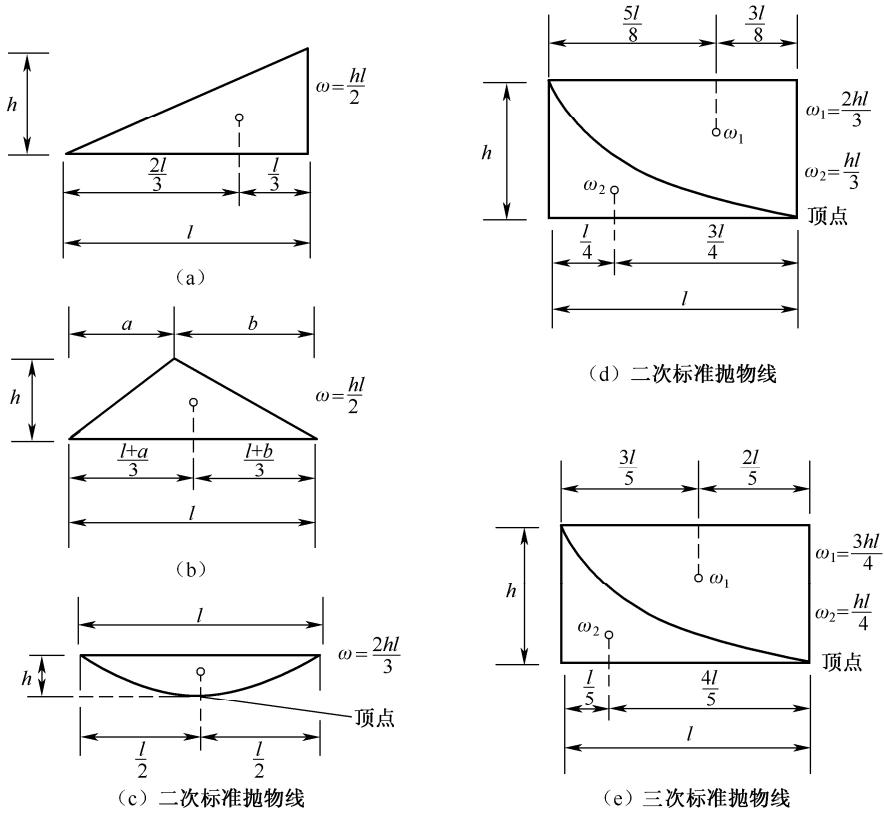


图 4-19 图形面积及形心

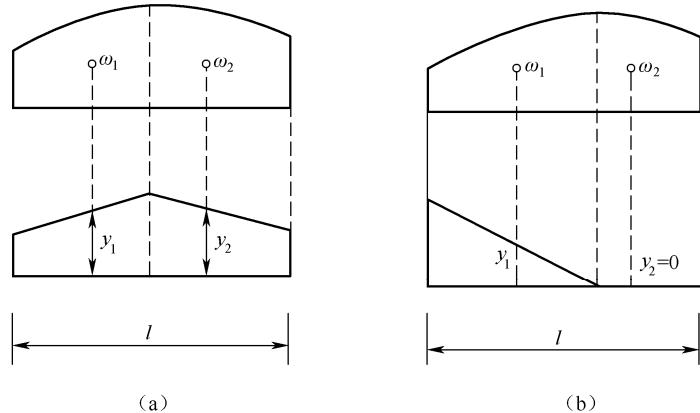


图 4-20 折线分段图乘

## 2. 叠加

当图形比较复杂而使得面积计算或形心位置确定比较困难时，可将复杂图形分解为若干个简单图形，分别将简单图形相乘后再叠加。

(1) 两个图形都是梯形（图 4-21），为避免求梯形面积的形心，可以把一个梯形分解为两个三角形（或分为一个矩形和一个三角形），分别应用图乘法，然后叠加。

如图 4-21 所示图形的图乘结果为

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega y_C}{EI} &= \frac{1}{EI}(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2) \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{al}{2} \left( \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d \right) + \frac{bl}{2} \left( \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}d \right) \right] \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc) \right]
 \end{aligned}$$

对图 4-22 所示的图形, 上式仍然适用, 但式中各项正、负号必须符合图乘法的正负号规则, 其图乘结果为

$$\frac{\omega y_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l}{6} (-2ac - 2bd + ad + bc) \right]$$

(2) 对于图 4-23 (a) 中所示在均布荷载及杆端弯矩作用下的杆件, 其弯矩图如图 4-23 (b) 所示, 为了避免计算该弯矩图形的面积及其形心位置的麻烦, 可根据直杆弯矩图的叠加法原理, 将其分解成图 4-23 (c) (由两端弯矩产生的直线弯矩图)、图 4-23 (d) (在均布荷载  $q$  作用下的抛物线弯矩图) 两部分, 再根据分解后的图形与另一弯矩图进行图形相乘, 最后将图乘结果相加。

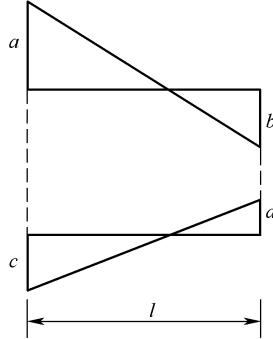


图 4-22 梯形分段图乘

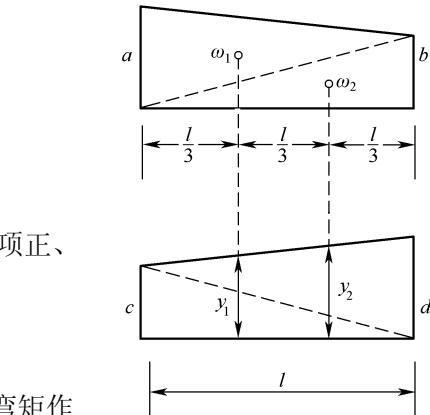
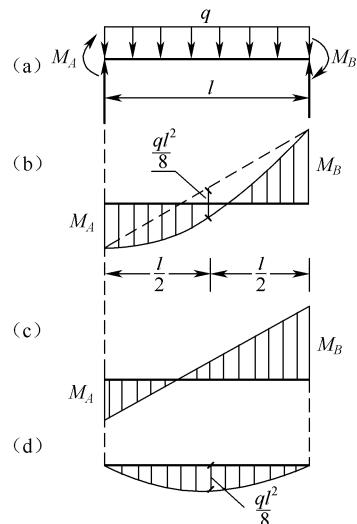


图 4-21 梯形分段图乘

图 4-23  $M_p$  图叠加图乘

**例题 4-6** 用图乘法计算图 4-24 (a) 所示简支梁在均布荷载  $q$  作用下中点  $C$  的挠度,  $EI =$  常数。

**解** 在简支梁中点  $C$  加单位竖向力  $P=1$ , 如图 4-24 (b) 所示。并分别作荷载  $q$  所产生的弯矩图  $M_p$  (图 4-24 (a)) 和单位力  $P=1$  所产生的弯矩图  $\bar{M}$  (图 4-24 (b))。

因  $M_p$  图是曲线, 应以  $M_p$  图作为  $\omega$ , 而  $\bar{M}$  图是两直线组成, 应分两段进行。但因图形对称, 可计算一半再乘两倍。

图乘法公式为

$$\omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{q l^2}{8} = \frac{q l^3}{24}$$

$$y_0 = \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{4} = \frac{5l}{32}$$

$$\text{所以 } \Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M_p}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \omega y_0 = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{5l}{32} = \frac{5ql^4}{384EI} \quad (\downarrow)$$

例题4-7 计算图4-25 (a) 所示伸臂梁在C端截面的转角,  $EI = 45 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$  为常数。

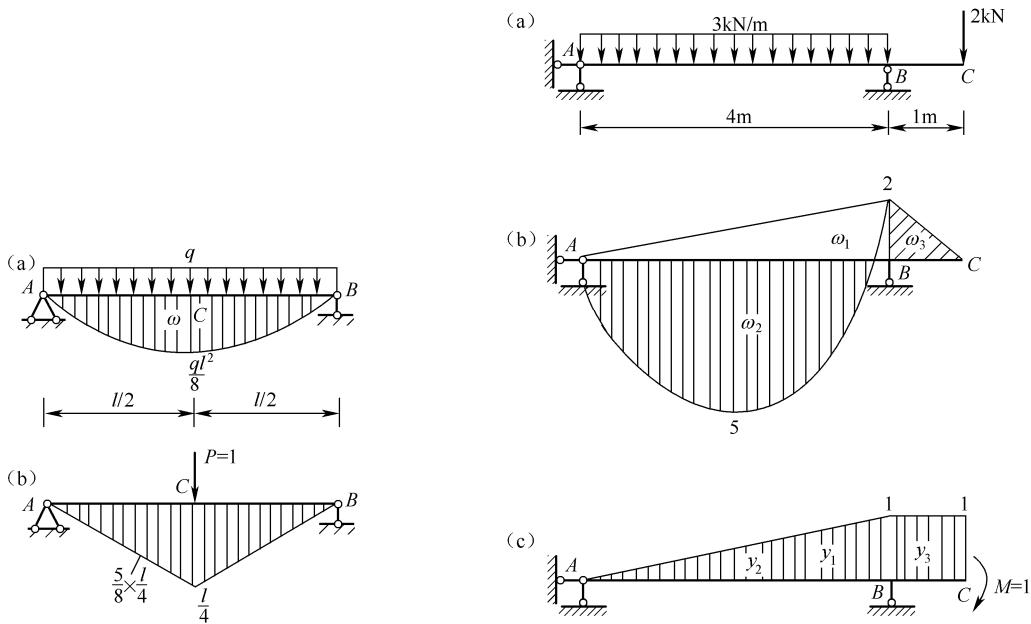


图 4-24 例题 4-6 图

图 4-25 例题 4-7 图

解 在C端加一单位力偶, 如图4-25 (c) 所示。

分别作荷载作用下的弯矩图  $M_p$  (图4-25 (b)) 和单位力偶作用下的弯矩图  $\bar{M}$  (图4-25 (c))。

$\bar{M}$  图包括两段直线, 所以, 整个梁应分为AB和BC两段应用图乘法。其中AB一段的  $M_p$  图可分解为在基线上边的三角形  $\omega_1$  和在基线下边的抛物线  $\omega_2$ 。 $\omega$  和  $y$  分别计算如下:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4, \quad y_1 = \frac{2}{3} \quad (\text{y}_1 \text{ 与 } \omega_1 \text{ 同侧})$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3} \times 4 \times 6 = 16, \quad y_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{y}_2 \text{ 与 } \omega_2 \text{ 反侧})$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1, \quad y_3 = 1 \quad (\text{y}_3 \text{ 与 } \omega_3 \text{ 同侧})$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EI} \sum \omega y_0 = \frac{1}{EI} (\omega_1 y_1 - \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3) \\ &= \frac{1}{EI} \left( 4 \times \frac{2}{3} - 16 \times \frac{1}{2} + 1 \right) = -\frac{13}{3EI} = -\frac{13}{3 \times 45} = -0.096(\text{rad}) \quad (\checkmark) \end{aligned}$$

负号表示C端截面转角的方向是逆时针旋转。

例题4-8 图4-26 (a) 所示变截面杆AB段的弯曲刚度为  $4EI$ , BC段的弯曲刚度为  $EI$ ,

试求C点的竖向位移 $\Delta_{C_y}$ 。

解 作实际状态的 $M_p$ 图(图4-26(b))。

建立虚拟状态，并作 $\bar{M}$ 图(图4-26(c))。

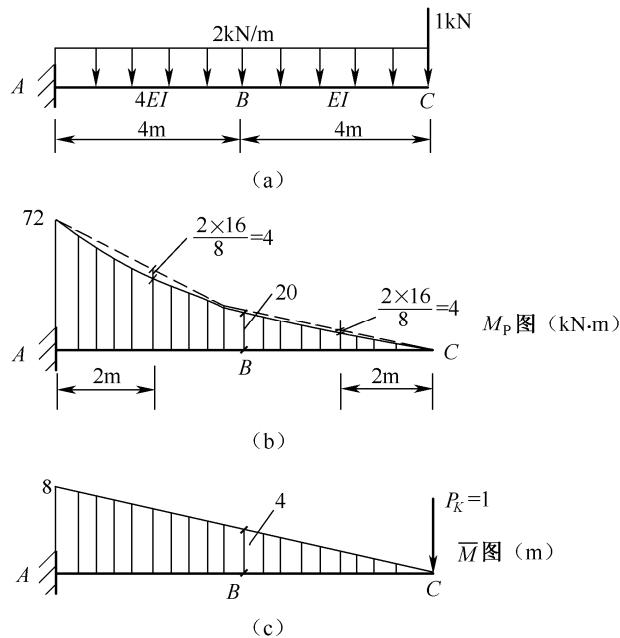


图4-26 例题4-8图

因为 $AB$ 、 $BC$ 段的 $EI$ 不相同，故 $AB$ 、 $BC$ 段应分别进行图乘。图乘时，可将 $AB$ 段的 $M_p$ 图分解成一个梯形和一个二次标准抛物线。 $BC$ 段 $M_p$ 图在 $C$ 点的切线与基线不平行(因 $C$ 点有集中力，剪力不为零)，故 $BC$ 段的 $M_p$ 图不是标准的二次抛物线，它的面积和形心位置不能用图4-19(d)中的数据确定，为了便于图乘，可将此段的 $M_p$ 图分解成一个三角形和一个二次标准抛物线。将分解后的 $M_p$ 图分别与 $\bar{M}$ 图进行图乘后再相加，其结果为

$$\begin{aligned}\Delta_{C_y} &= \sum \frac{\omega y_C}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \times 4 \times 20 \right) \left( \frac{2}{3} \times 4 \right) - \left( \frac{2}{3} \times 4 \times 4 \right) \left( \frac{1}{2} \times 4 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4EI} \left[ \frac{4}{6} \left( 2 \times 72 \times 8 + 2 \times 20 \times 4 + 72 \times 4 + 20 \times 8 \right) - \left( \frac{2}{3} \times 4 \times 4 \right) \left( \frac{8+4}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1088}{3EI} (\downarrow)\end{aligned}$$

所得结果为正，表示 $\Delta_{C_y}$ 的实际方向向下。

例题4-9 求图4-27(a)所示多跨静定梁D点的竖向位移 $\Delta_{D_y}$ 和铰C处左、右两侧截面的相对转角 $\theta_C$ 。

解 作实际状态的 $M_p$ 图(图4-27(b))。

建立虚拟状态，求 $\Delta_{D_y}$ 、 $\theta_C$ 的虚拟状态，并作相应的 $\bar{M}$ 图(图4-27(c)、(d))所示。

进行图形相乘，求 $\Delta_{D_y}$ 及 $\theta_C$ 。

将图4-27(b)、(c)进行图乘，得 $\Delta_{D_y}$ 为

$$\begin{aligned}
\Delta_{Dy} = \sum \frac{\omega y_C}{EI} = & \frac{1}{2EI} \left[ \frac{l}{6} \times \left( 2 \times \frac{3ql^2}{8} \times \frac{l}{4} - \frac{ql^2}{2} \times \frac{l}{4} \right) - \frac{2}{3} \times l \times \frac{ql^2}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{4} \right] \\
& + \frac{1}{2EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{3ql^2}{8} \right) \left( \frac{2}{3} \times \frac{l}{4} \right) - \left( \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{ql^2}{32} \right) \left( \frac{1}{2} \times \frac{l}{4} \right) \right] \\
& + \frac{1}{EI} \left( \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{ql^2}{8} \right) \left( \frac{5}{8} \times \frac{l}{4} \right) \times 2 = \frac{31ql^4}{1536EI} (\downarrow)
\end{aligned}$$

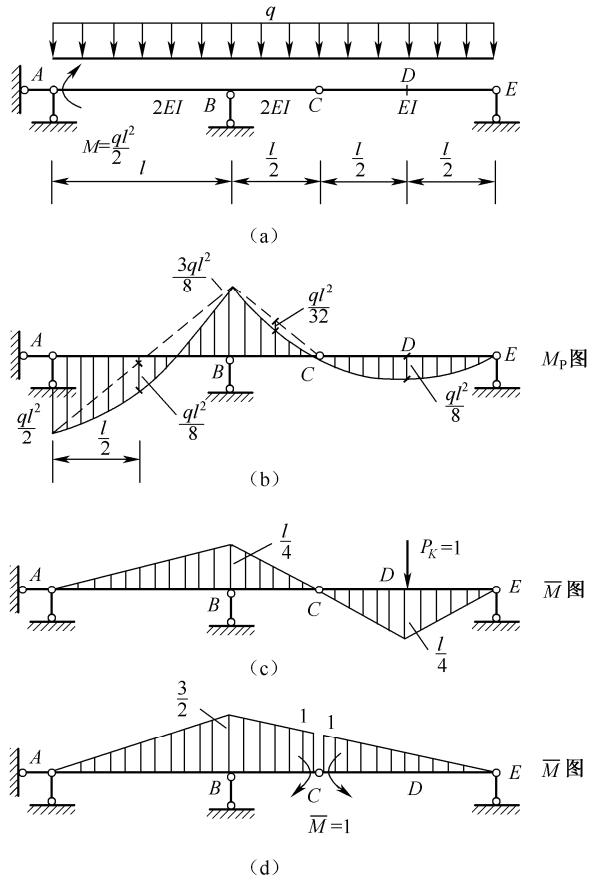


图 4-27 例题 4-9 图

所得结果为正，表示位移的实际方向向下。

将图 4-27 (b)、(d) 进行图乘，得  $\theta_C$  为

$$\begin{aligned}
\theta_C = \sum \frac{\omega y_C}{EI} = & \frac{1}{2EI} \left[ \frac{l}{6} \times \left( 2 \times \frac{3ql^2}{8} \times \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{ql^2}{2} \right) - \frac{2}{3} \times l \times \frac{ql^2}{8} \times \frac{3}{4} \right] \\
& + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{6} \times \frac{l}{2} \left( 2 \times \frac{3ql^2}{8} \times \frac{3}{2} + \frac{3ql^2}{8} \times 1 \right) - \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{ql^2}{32} \times \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) \right] \\
& - \frac{1}{EI} \left( \frac{2}{3} \times l \times \frac{ql^2}{8} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{11ql^3}{768EI} (\text{负})
\end{aligned}$$

所得结果为正，表示相对转角 $\theta_c$ 的实际方向与假定的 $\bar{M}=1$ 的方向一致。

**例题4-10** 试求图4-28(a)所示结构结点E的角位移 $\theta_E$ 。已知弹簧支杆B的刚度系数(使弹簧支杆产生单位位移所需的力) $k_N = EI/l^3$ ，弹簧铰支座A的刚度系数(使弹簧产生单位转角所需的力矩) $k_M = EI/l$ 。

**解** 含有弹簧约束的结构的位移计算原理和方法，与无弹簧约束时的计算原理和方法是相同的，只要在变形体系的虚功原理式(4-5)或位移计算式(4-6)的等号右边增加一项虚拟状态的弹簧约束力在实际状态的弹簧约束位移上所作的虚变形功即可。本例中，若略去受弯杆件的轴向和剪切变形对位移的影响，则结构位移可按下式计算：

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}M_p ds}{EI} + \sum \bar{F}_N F_{NP} \times \frac{1}{k_N} + \sum \bar{M}M_p \times \frac{1}{k_M}$$

或

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}M_p ds}{EI} + \sum \bar{F}_N F_{NP} f_N + \sum \bar{M}M_p f_M$$

上式中的 $f_N = 1/k_N$ 为弹簧支杆的柔度系数(单位力使线弹簧支杆产生的线位移，它与刚度系数 $k_N$ 互为倒数)； $f_M = 1/k_M$ 为弹簧铰的柔度系数(单位力矩使弹簧铰产生的转角，它与刚度系数 $k_M$ 互为倒数)。

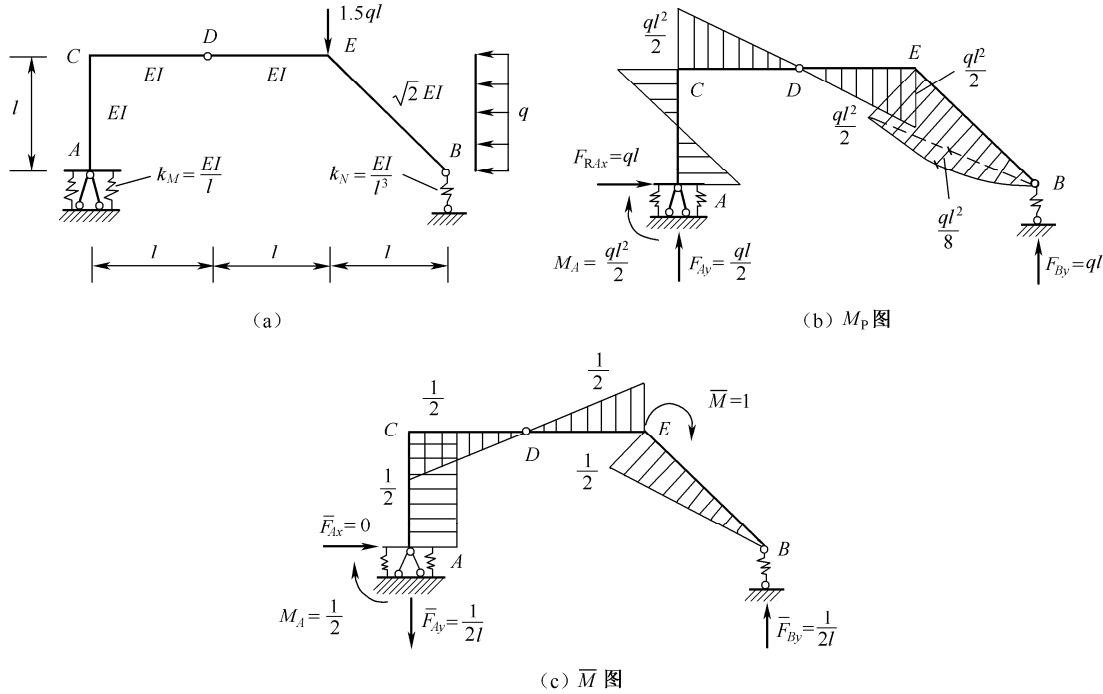


图 4-28 例题 4-10 图

具体的计算步骤和方法如下：

- (1) 求作实际状态下的 $M_p$ 图，计算弹簧支杆的反力及弹簧铰支座的反弯矩，如图4-28(b)所示。
- (2) 建立虚拟状态，并由静力平衡条件求出相应的反力及 $\bar{M}$ 图，如图4-28(c)所示。

(3) 求结点  $E$  的角位移  $\theta_E$ 。

按上述公式

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}M_p ds}{EI} + \sum \bar{F}_N F_{NP} \times \frac{1}{k_N} + \sum \bar{M}M_p \times \frac{1}{k_M}$$

可得

$$\begin{aligned} \theta_E = & \frac{1}{EI} \left[ \left( -\frac{1}{2} \times l \times \frac{1}{2} ql^2 \right) \left( \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) 2 \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \times \sqrt{2}l \times \frac{1}{2} ql^2 \right) \left( \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{2}{3} \times \sqrt{2}l \times \frac{ql^2}{8} \right) \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2l} \left( ql \times \frac{1}{k_N} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{ql^2}{2} \times \frac{1}{k_M} \right) = \frac{33ql^3}{48EI} \quad (\text{→}) \end{aligned}$$

所得结果为正，表示  $\theta_E$  的实际方向与假设的  $\bar{M}=1$  方向一致。

**例题 4-11** 求图 4-29 (a) 刚架在水压力作用下  $C$ 、 $D$  两点的相对水平位移。各杆  $EI =$  常数。

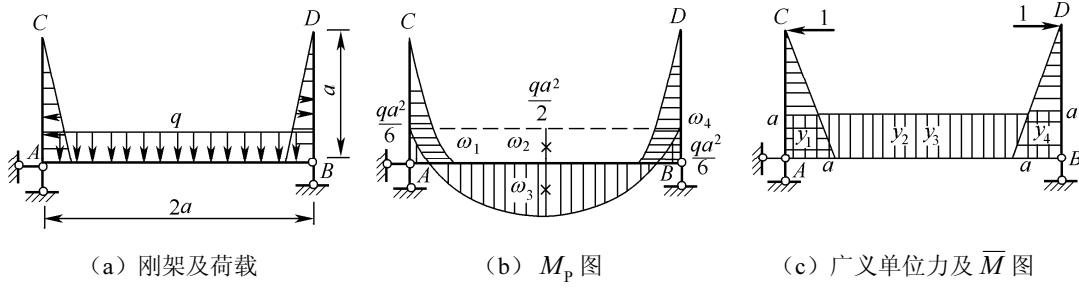


图 4-29 例题 4-11 图

**解** 在  $C$  点和  $D$  点分别加一对方向相反的单位水平力 (图 4-29 (c)), 这是一个广义力。

分别作荷载作用下的  $M_p$  图 (图 4-29 (b)) 和单位广义力作用下的  $\bar{M}$  图 (图 4-29 (c)) 注意  $AC$ 、 $BD$  杆的  $M_p$  图为三次抛物线, 顶点在  $C$ 、 $D$  点。

$$\omega_1 = \frac{1}{4} \times a \times \frac{qa^2}{6} = \frac{qa^3}{24}, \quad y_1 = \frac{4}{5} \times a = \frac{4}{5}a \quad (\text{与 } \omega_1 \text{ 同侧})$$

杆  $AB$

$$\omega_2 = 2a \times \frac{qa^2}{6} = \frac{qa^3}{3}, \quad y_2 = a \quad (\text{与 } \omega_2 \text{ 同侧})$$

$$\omega_3 = \frac{2}{3} \times 2a \times \frac{qa^2}{2} = \frac{2qa^3}{3}, \quad y_3 = a \quad (\text{与 } \omega_3 \text{ 反侧})$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta_{KP} &= \sum \int \frac{\bar{M}M_p}{EI} ds = \frac{1}{EI} (2\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 - \omega_3 y_3) \\ &= \frac{1}{EI} \left[ 2 \times \frac{qa^3}{24} \times \frac{4a}{5} + \frac{qa^3}{3} \times a - \frac{2qa^3}{3} \times a \right] = \frac{-1}{EI} \times \frac{4qa^4}{15} \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{aligned}$$

计算结果为负值, 说明  $C$ 、 $D$  两点实际的相对水平位移与虚设广义单位荷载的指向相反,

即为相互靠近。

## 4.6 静定结构在非荷载因素作用下的位移计算

### 4.6.1 静定结构由于温度改变的位移计算

静定结构当温度变化时虽然不产生内力，但由于材料具有热胀冷缩的性质从而引起截面的应变（温度应变），使得静定结构自由地产生符合其约束条件的位移，这种位移仍可应用虚功原理进行计算。

如图 4-30 (a) 所示结构外侧温度升高  $t_1$  °C，内侧温度升高  $t_2$  °C，现要求由此引起的任一点沿任一方向的位移，例如  $K$  点的竖向位移  $\Delta_{Kt}$ ，下标  $t$  表示  $\Delta_{Kt}$  是由温度变化引起的，为此需建立相应的单位力对应的虚拟状态，根据位移计算公式中的单位荷载法，有

$$\Delta_{Kt} = \sum \int \bar{F}_N \, du_t + \sum \int \bar{M} \, d\theta_t + \sum \int \bar{F}_Q \gamma_t \, ds \quad (a)$$

式中， $\bar{M}$ 、 $\bar{F}_N$  和  $\bar{F}_Q$  分别为虚拟状态中微段  $ds$  两侧截面上的弯矩、轴向力和剪力； $d\theta_t$ 、 $du_t$  和  $\gamma_t \, ds$  分别为实际状态中微段  $ds$  由温度变化引起的两端截面的相对转角、轴向位移和剪切位移，如图 4-30 所示。

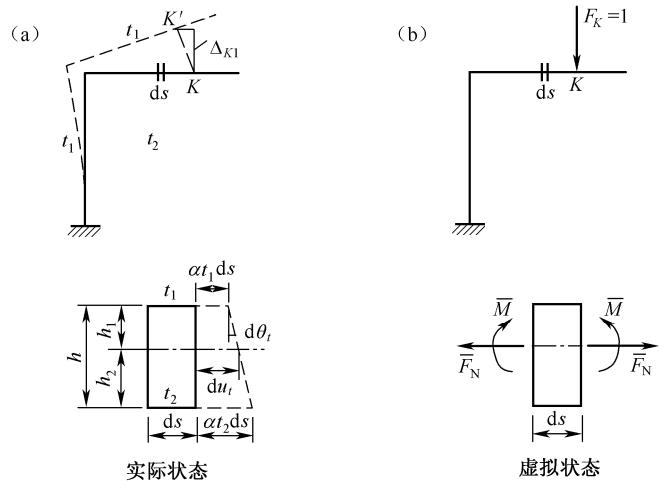


图 4-30 温度变化的变形

设温度沿微段截面厚度  $h$  为线性分布，即假设在发生温度变形后，截面仍保持为平面，微段截面的变形可分解为沿轴线方向的拉伸变形  $du_t$  和截面的转角  $d\theta_t$ ，且由于杆件在温度变化时可以自由地发生变形，故微段两端截面不产生剪切变形，即  $\gamma_t = 0$ 。

根据几何关系可得杆件轴线处的温度升高  $t$  为

$$t = \frac{t_1 h_2 + t_2 h_1}{h}$$

特别地，若杆件横截面对称于形心轴，即  $h_1 = h_2 = h/2$ ，则上式为

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

设杆轴线处的温度变化为

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

于是, 有

$$du_t = \alpha t_1 ds + (\alpha t_2 ds - \alpha t_1 ds) \frac{h_1}{h} = \alpha \left( \frac{h_2}{h} t_1 + \frac{h_1}{h} t_2 \right) ds = \alpha t ds \quad (b)$$

$$d\theta_t = \frac{\alpha t_2 ds - \alpha t_1 ds}{h} = \frac{\alpha(t_2 - t_1) ds}{h} = \frac{\alpha \Delta t ds}{h} \quad (c)$$

将式 (b)、(c) 代入式 (a) 可得

$$\begin{aligned} \Delta_{Kt} &= \sum \int \bar{F}_N \alpha t ds + \sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds \\ &= \sum \alpha t \int \bar{F}_N ds + \sum \alpha \Delta t \int \bar{M} \frac{ds}{h} \end{aligned} \quad (4-13)$$

若各杆均为等截面杆时, 则有

$$\begin{aligned} \Delta_{Kt} &= \sum \alpha t \int \bar{F}_N ds + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} ds \\ &= \sum \alpha t \omega_{\bar{F}_N} + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{\bar{M}} \end{aligned} \quad (4-14)$$

式中  $\omega_{\bar{F}_N} = \int \bar{F}_N ds$ 、 $\omega_{\bar{M}} = \int \bar{M} ds$ , 为  $\bar{F}_N$  及  $\bar{M}$  图的面积。

在应用式 (4-13) 和 (4-14) 时, 应注意右边各项正负号的确定。由于它们都是内力所作的变形虚功, 故当实际温度变形与虚拟内力方向一致时其乘积为正, 相反为负。因此, 对于温度变化, 若规定以升温为正, 降温为负, 则轴力  $\bar{F}_N$  为拉力则为正, 为压力则为负; 弯矩  $\bar{M}$  应以使  $t_2$  边受拉者为正, 反之为负。

对于梁和刚架, 在计算温度变化所引起的位移时, 一般不能略去轴向变形的影响。

对于桁架, 在温度变化时, 其位移计算公式为

$$\Delta_{Kt} = \sum \bar{F}_N \alpha t l \quad (4-15)$$

**例题 4-12** 图 4-31 (a) 所示刚架施工时的温度为  $30^{\circ}\text{C}$ , 冬季外侧温度为  $-20^{\circ}\text{C}$ , 内侧温度为  $10^{\circ}\text{C}$ , 各杆截面相同, 均为矩形截面, 截面高度为  $h$ , 材料的线膨胀系数为  $\alpha$ 。试求刚架在冬季温度时  $B$  点的水平位移。

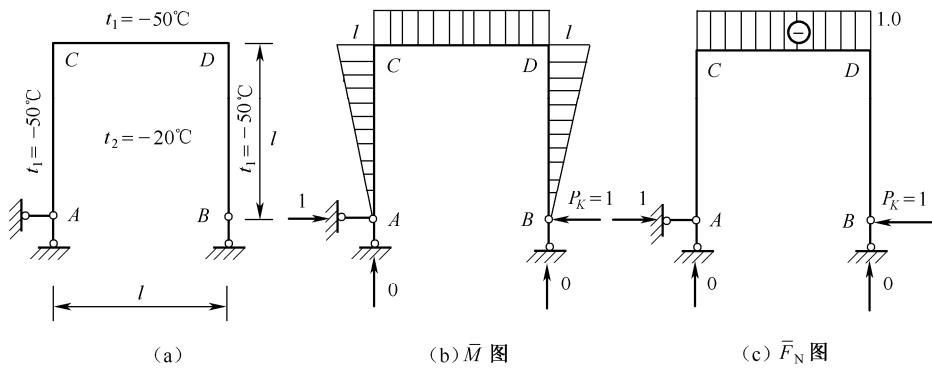


图 4-31 例题 4-12 图

解 各杆外侧温度变化为

$$t_1 = -20 - 30 = -50^{\circ}\text{C}$$

内侧温度变化为

$$t_2 = 10 - 30 = -20 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

于是得各杆的  $t$  及  $\Delta t$  为

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{-50 - 20}{2} = -35 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta t = |t_2 - t_1| = |-20 - (-50)| = 30 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

虚拟状态的  $\bar{M}$  图及  $\bar{F}_N$  图分别如图 4-31 (b)、(c) 所示。

由式 4-14 可得

$$\begin{aligned} \Delta_{Bt} &= \sum \alpha t \omega_{\bar{F}_N} + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_{\bar{M}} \\ &= \alpha(-35)(-1 \times l) + \frac{30\alpha}{h} \left( -\frac{1}{2} \times l \times l \times 2 - l \times l \right) \\ &= 35\alpha l - \frac{60\alpha l^2}{h} \end{aligned}$$

上式中, 因为  $CD$  杆的  $\bar{F}_N$  为压力,  $CD$  杆的  $t$  为负(温度下降), 两者方向相同, 故乘积  $t\omega_{\bar{F}_N}$  为正值; 各杆由  $\bar{M}$  引起的弯曲均为外侧受拉, 而各杆在图 4-31 (a) 所示温度变化情况下引起的弯曲均为内侧受拉, 两者方向相反, 故各杆的乘积  $\Delta t \omega_{\bar{M}}$  均为负值。

**例题 4-13** 图 4-32 (a) 所示等截面圆弧形曲梁的内、外侧温度均匀下降  $t$   $^{\circ}\text{C}$ , 已知杆件横截面为矩形, 截面高度为  $h$ , 材料线膨胀系数为  $\alpha$ , 试求  $B$  点的水平位移。

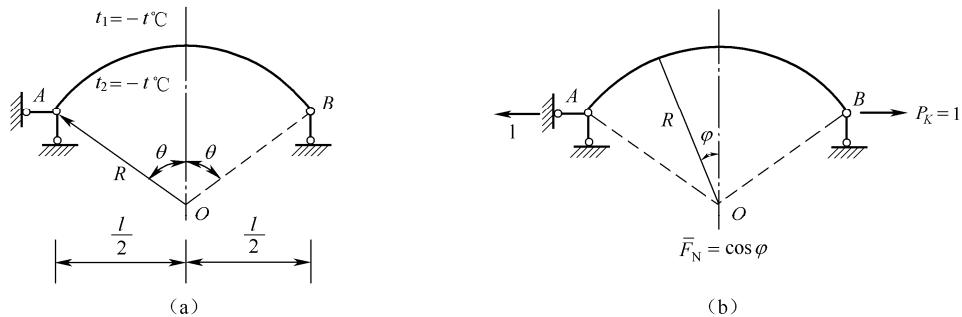


图 4-32 例题 4-13 图

解

$$\Delta t = |t_2 - t_1| = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}, \quad t_0 = \frac{-t - t}{2} = -t \text{ }^{\circ}\text{C} \quad (\text{轴线处的温度变化值为})$$

虚拟状态如图 4-32 (b) 所示。任意截面的  $\bar{F}_N = \cos \varphi$  (受拉)。

由式 (4-13) 可得

$$\begin{aligned} \Delta_{Bt} &= \sum \int \bar{F}_N \alpha t_0 \, ds + \sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t \, ds}{h} = \left( -\alpha t \int_0^\theta \cos \varphi R \, d\varphi \right) \times 2 \\ &= -2\alpha t R \sin \theta = -\alpha t l \quad (\leftarrow) \end{aligned}$$

因为  $\bar{F}_N$  为拉力,  $t_0$  为负值(温度下降), 故计算结果为负, 表示  $B$  点的实际水平位移与假设单位力  $P_k = 1$  的方向相反。

### 4.6.2 静定结构由于支座移动引起的位移计算

图 4-33 (a) 所示静定结构的支座发生了水平位移  $C_1$ 、竖向沉陷  $C_2$  和转角  $C_3$ ，现要求由此引起的任一点沿任一方向的位移，例如求  $K$  点的竖向位移  $\Delta_{Kc}$ ，下标  $c$  表示  $\Delta_{Kc}$  是由支座位移所引起。为了根据虚功原理求位移  $\Delta_{Kc}$ ，建立图 4-33 (b) 所示的虚拟状态，在此状态中，设支座处的水平反力为  $\bar{F}_{R1}$ 、竖向反力为  $\bar{F}_{R2}$ 、反弯矩为  $\bar{F}_{R3}$ 。

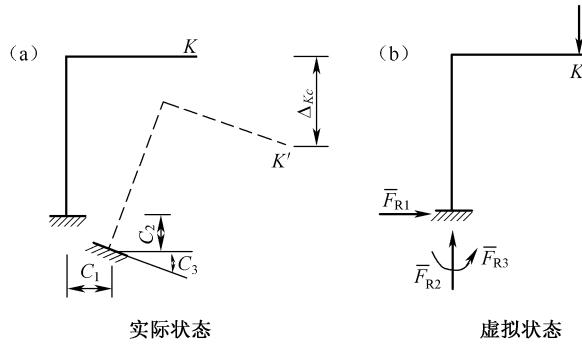


图 4-33 支座移动引起的位移计算

静定结构在支座位移时不引起内力，杆件只有刚体位移而不产生变形，因此虚拟状态的内力虚功为零，这时，位移计算的一般公式简化为

$$\Delta_{Kc} = -\sum \bar{F}_R C \quad (4-16)$$

此即为静定结构在支座移动时的位移计算公式。式中  $\sum \bar{F}_R C$  为反力虚功，当  $\bar{F}_R$  与实际支座位移  $C$  方向一致时其乘积取正，相反时为负。

**例题 4-14** 图 4-34 (a) 所示三铰刚架右边支座的竖向位移为  $\Delta_{By} = 0.06 \text{ m}$  (向下)，水平位移为  $\Delta_{Bx} = 0.04 \text{ m}$  (向右)，已知  $l = 12 \text{ m}$ ， $h = 8 \text{ m}$ 。试求由此引起的  $A$  端转角  $\theta_A$ 。

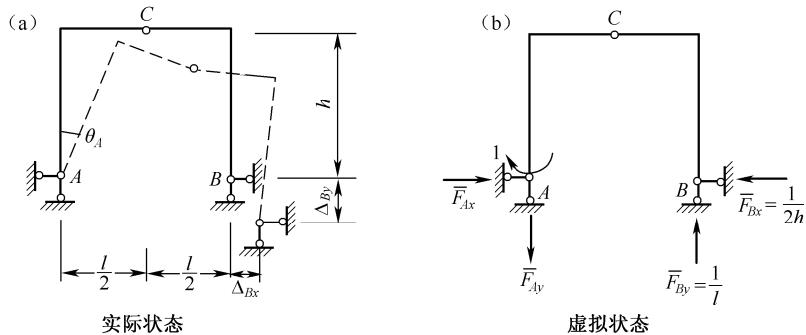


图 4-34 例题 4-14 图

解

虚拟状态如图 4-34 (b) 所示，考虑刚架的整体平衡，

$$\sum M_A = 0, \text{ 得 } \bar{F}_{By} = \frac{1}{l} \text{ (↑);}$$

再考虑右半刚架的平衡,

$$\sum M_C = 0, \text{ 得 } \bar{F}_{Bx} = \frac{1}{2h} \quad (\leftarrow)$$

由式(4-16)有

$$\begin{aligned} \theta_A &= -\sum \bar{F}_R C = -\left( -\frac{1}{l} \Delta_{By} - \frac{1}{2h} \Delta_{Bx} \right) \\ &= \frac{\Delta_{By}}{l} + \frac{\Delta_{Bx}}{2h} = \frac{0.06\text{m}}{12\text{m}} + \frac{0.04\text{m}}{2 \times 8\text{m}} \\ &= 0.0075\text{rad} \text{ (顺时针方向)} \end{aligned}$$

## 4.7 线弹性结构的互等定理

线弹性体系有四个互等定理: 虚功互等定理、位移互等定理、反力互等定理、反力位移互等定理。其中, 虚功互等定理是基本定理, 其他三个互等定理都可由虚功互等定理导出。这些定理在以后的章节中会经常引用。

### 4.7.1 虚功互等定理

定义: 第一状态的外力在第二状态的位移上所作的虚功等于第二状态的外力在第一状态的位移上所作的虚功。

现证明如下: 图4-35表示两组广义力  $F_1$ 、 $F_2$  分别作用于同一线弹性体系上, (a) 图为第一状态; (b) 图为第二状态。若考虑第一状态的外力  $F_1$  及内力  $M_1$ 、 $F_{N1}$ 、 $F_{Q1}$  在第二状态的相应位移及变形上所做的外力虚功  $W_{12}$  及内力虚功  $W_{i12}$ , 则根据变形体系的虚功原理, 有  $W_{12} = W_{i12}$ , 即

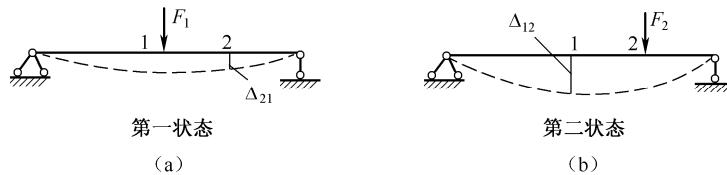


图4-35 简支梁

$$F_1 \Delta_{12} = \sum \int \frac{M_1 M_2 ds}{EI} + \sum \int \frac{F_{N1} F_{N2} ds}{EA} + \sum \int \frac{k F_{Q1} F_{Q2} ds}{GA} \quad (a)$$

式中,  $\Delta_{12}$  表示由广义力  $F_2$  引起的与广义力  $F_1$  相应的广义位移。

同理, 第二状态的外力  $F_2$  及内力  $M_2$ 、 $F_{N2}$ 、 $F_{Q2}$  在第一状态的相应位移及变形上所作的外力虚功  $W_{21}$  及内力虚功  $W_{i21}$  为

$$F_2 \Delta_{21} = \sum \int \frac{M_2 M_1 ds}{EI} + \sum \int \frac{F_{N2} F_{N1} ds}{EA} + \sum \int \frac{k F_{Q2} F_{Q1} ds}{GA} \quad (b)$$

式中,  $\Delta_{21}$  表示由广义力  $F_1$  引起的与广义力  $F_2$  相应的广义位移。

显然, (a)、(b) 两式等号右边两部分是彼此相等的, 即

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21} \quad (4-17)$$

或

$$W_{12} = W_{21} \quad (4-18)$$

#### 4.7.2 位移互等定理

定义：第二个单位力所引起的第一单位力作用点沿其方向的位移  $\Delta_{12}$ ，等于第一个单位力所引起的第二个单位力作用点沿其方向的位移  $\Delta_{21}$ 。

现证明如下：设图 4-36 所示两个状态中的荷载都是单位力，即  $F_1 = F_2 = 1$ ，由虚功互等定理可得

$$1 \times \Delta_{12} = 1 \times \Delta_{21}$$

即

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} \quad (4-19)$$

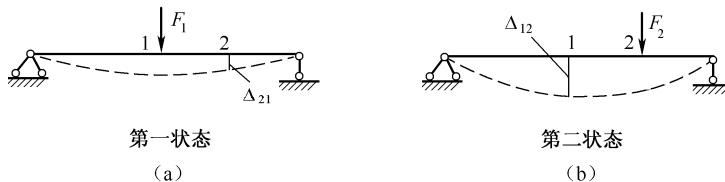


图 4-36 简支梁受任意集中力

应该指出，这里所说的单位力及其相应的位移，均是广义力和广义位移。即位移互等定理不仅适用于两个线位移之间的互等，也适用于两个角位移之间或线位移与角位移之间的互等。例如，在图 4-37 (a)、(b) 所示的两个状态中，由位移互等定理，应有  $\theta_A = f_C$ 。实际上，由材料力学可知

$$\theta_A = \frac{Fl^2}{16EI}, \quad f_C = \frac{Ml^2}{16EI}$$

当  $F = 1$ ， $M = 1$  时， $\theta_A = f_C = \frac{l^2}{16EI}$ 。由于  $F = 1$ 、 $M = 1$  都是无量纲量，故  $\theta_A$  与  $f_C$  不仅数值相等，且量纲也相同。

#### 4.7.3 反力互等定理

反力互等定理只适用于超静定结构。

定义：支座 1 发生单位位移所引起的支座 2 的反力，等于支座 2 发生单位位移所引起的支座 1 的反力。

现证明如下：图 4-38 (a) 所示连续梁的支杆 1 沿支杆方向产生单位位移  $\Delta_1 = 1$ ，由此使支杆 2 产生的反力为  $r_{21}$ ，设该状态为第一状态。图 4-38 (b) 所示为同一连续梁的支杆 2 沿  $r_{21}$  方向产生单位位移  $\Delta_2 = 1$ ，由此使支杆 1 沿  $\Delta_1 = 1$  的方向产生的反力为  $r_{12}$ ，设该状态为第二状态。于是，由虚功互等定理可得

$$r_{21}\Delta_2 = r_{12}\Delta_1$$

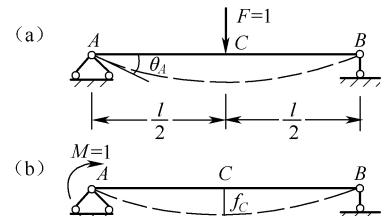


图 4-37 简支梁受集中力偶、集中力

即

$$r_{21} = r_{12} \quad (4-20)$$

此即为反力互等定理。它说明了超静定结构中假设两个支座分别产生单位位移时，两个状态中反力的互等关系。这一定理对结构上任何两个支座都是适用的，但应注意反力与位移在作功的关系上应相对应，即力对应于线位移，力偶对应于角位移。例如在图 4-39 (a)、(b) 的两个状态中， $r_{12} = r_{21}$ ，它们虽然分别为单位位移引起的反力偶和单位转角引起的反力，具有不同的含义，但此时二者在数值上是相等的，且量纲也相同。

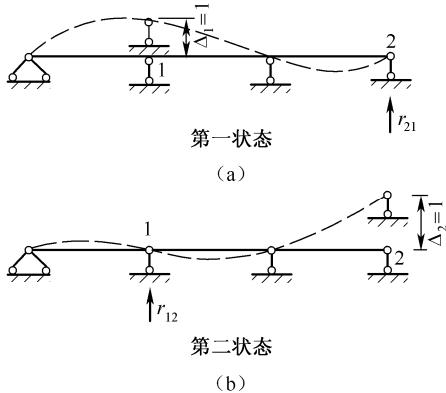


图 4-38 连续梁

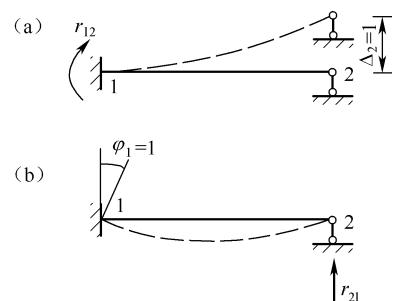


图 4-39 超静定梁

#### 4.7.4 反力位移互等定理

反力位移互等定理只适用于超静定结构。

定义：单位力所引起的结构支座反力，等于该支座发生单位位移时所引起的单位力作用点沿其方向的位移，但符号相反。

现证明如下：对于图 4-40 所示超静定梁，(a) 图称为第一状态，在点 2 处作用有单位荷载  $F_2 = 1$  时，支座 1 的反力偶为  $r_{12}$ ；(b) 图称为第二状态，当支座沿  $r_{12}$  方向发生单位转角  $\theta_1 = 1$  时， $F_2$  作用点沿其方向的位移为  $\delta_{21}$ 。对这两个状态应用虚功互等定理，有

$$r_{12}\theta_1 + F_2\delta_{21} = 0$$

由于  $\theta_1 = 1$ ， $F_2 = 1$ ，则有

$$r_{12} = -\delta_{21} \quad (4-21)$$

此即为反力位移互等定理。它揭示了超静定结构一个状态中的反力与另一个状态中的位移具有的互等关系。



图 4-40 超静定梁

## 4.8 空间刚架的位移计算公式

受任意载荷作用的空间刚架，其杆件横截面上一般有六个内力，轴向力  $F_N$ ，分别沿着截面形心主轴的两个剪力  $F_{Qy}$  和  $F_{Qz}$ ，分别绕截面形心主轴的两个弯矩  $M_y, M_z$ ，及扭矩  $M_t$ ；与这些内力分量对应，杆件微段  $ds$  也有六个位移分量，即轴向位移  $du$ ，分别沿截面形心主轴的两个剪切位移  $\gamma_y \cdot ds, \gamma_z \cdot ds$ ，分别绕截面形心主轴的两个转角  $d\theta_y, d\theta_z$  和扭转角  $d\theta_x$ 。

设空间刚架在虚拟状态单位力作用下杆件横截面上的六个内力分量  $\bar{F}_N, \bar{F}_{Qy}, \bar{F}_{Qz}, \bar{M}_y, \bar{M}_z$  和  $\bar{M}_t$ ，则由变形体系的虚功原理，可得空间刚架在荷载作用下的位移计算公式为：

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_N}{EA} ds + \sum \int k_y \frac{\bar{F}_{Qy} F_{Qy}}{GA} ds + \sum \int k_z \frac{\bar{F}_{Qz} F_{Qz}}{GA} ds \\ + \sum \int \frac{\bar{M}_y M_y}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_z M_z}{EI_z} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_t M_t}{GI_t} ds \quad (4-22)$$

上式中的  $I_y, I_z$  分别为杆件截面对杆件形心主轴  $y, z$  的惯性矩； $GI_t$  是截面的抗扭刚度， $I_t$  是截面的抗扭惯性矩，几种常用截面的抗扭惯性矩  $I_t$  见表 4-1。

表 4-1 几种常用截面的抗扭惯性矩  $I_t$

截面形式	抗扭惯性矩 $I_t$
圆形 (半径为 $R$ )	$\frac{\pi}{2} R^4$
薄壁圆筒 (壁厚为 $t$ )	$2\pi R^3 t$
正方形 (边长为 $a$ )	$0.141a^4$
矩形 (长 $a$ , 宽 $b$ )	$\beta ab^3$

表 4-1 中的  $\beta$  为与比值  $\frac{a}{b}$  有关的系数，可由表 4-2 确定。

表 4-2  $\beta$  系数表

$\frac{a}{b}$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	1.0	$\infty$
$\beta$	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.333

由 (4-22) 式计算空间刚架的位移时，通常可以略去轴向变形和剪切变形的影响，即除弯矩外，只需要考虑扭矩的影响

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_y M_y}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_z M_z}{EI_z} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_t M_t}{GI_t} ds \quad (4-23)$$

当刚架各杆轴线均在同一平面内，且外力均垂直于此平面时，即平面刚架承受垂直荷载时，截面上只有三种内力：绕位于刚架平面内的主轴的弯矩，垂直于刚架平面的剪力和扭矩，

在这种情况下，略去剪力的影响，则位移的计算公式为

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_K M_p}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_t M_t}{GI_t} ds \quad (4-24)$$

## 本章小结

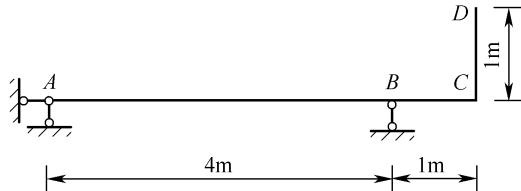
本章主要讨论应用虚功原理计算静定结构的位移。首先，以虚功原理作为理论依据，推导出结构位移计算的一般公式——单位荷载法。并分别对静定结构在荷载作用下和非荷载作用下产生的位移得出了相应的计算公式。同时对于线弹性结构的几种主要的互等定理进行了推导与讨论。本章还给出了空间刚架的位移计算公式。本章所给出的位移计算思想及公式在结构分析中十分重要。

## 思考题

- 4-1 结构位移计算的作用和目的是什么？
- 4-2 产生位移的因素主要有哪些？
- 4-3 为什么虚功原理无论对于弹性体、非弹性体、刚体都成立？它适用的条件是什么？
- 4-4 请写出用单位荷载法计算位移的一般公式。
- 4-5 图乘法的应用条件及注意点是什么？变截面杆及曲杆是否可用图乘法？
- 4-6 在温度变化引起的位移计算中，如何确定各项的正负号？
- 4-7 为什么在计算支座位移引起的位移计算公式中，求和符号前总是有一负号？
- 4-8 互等原理为何只适用于线弹性结构？

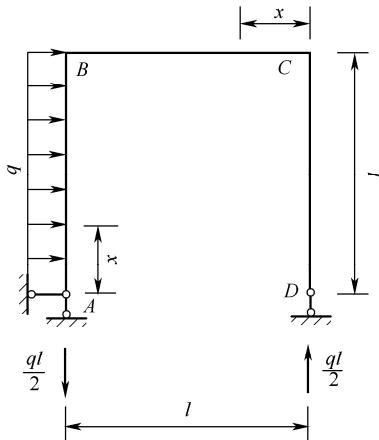
## 习题

- 4-1 应用刚体体系虚功原理求习题 4-1 图所示结构 D 点的水平位移；(a) 设支座 A 向左移动 1cm；(b) 设支座 A 下沉 1cm；(c) 设支座 B 下沉 1cm。

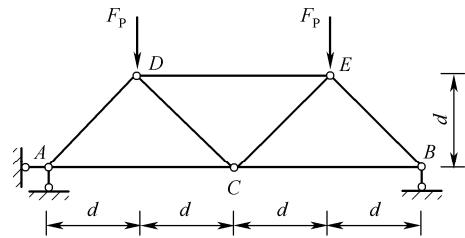


习题 4-1 图

- 4-2 试求习题 4-2 图所示刚架结点 C 的水平位移  $\Delta_{Cx}$ 。设各杆的弯曲刚度为  $EI$ ，横截面面积为  $A$ ，横截面为矩形，截面高度为  $h$ ，宽度为  $b$ 。忽略轴向变形和剪切变形的影响。
- 4-3 试求习题 4-3 图所示结点 C 的水平位移  $\Delta_{Cx}$ ，各杆的  $EA$  相等。
- 4-4 试求习题 4-4 图所示结点 C 的水平位移  $\Delta_{Cx}$ ，各杆的  $EA$  相等。

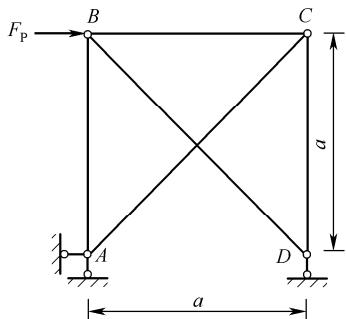


习题 4-2 图

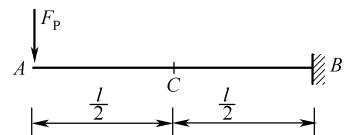


习题 4-3 图

4-5 习题 4-5 图所示为一悬臂梁，在 A 点作用集中荷载  $F_p$ 。试求中点 C 的挠度  $\Delta_C$ 。



习题 4-4 图

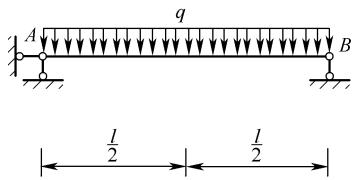


习题 4-5 图

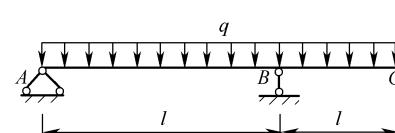
4-6 试用图乘法计算习题 4-6 图所示简支梁在均布荷载  $q$  作用下的 B 端转角  $\Delta_B$ 。

4-7 试求如习题 4-7 图所示外伸梁 C 点的竖向位移  $\Delta_{Cy}$ ，梁的  $EI$  为常数。

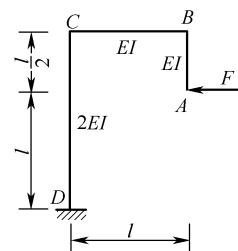
4-8 试求习题 4-8 图所示刚架 A 点的竖向位移  $\Delta_{Ay}$ ，并勾绘刚架的变形曲线。



习题 4-6 图



习题 4-7 图

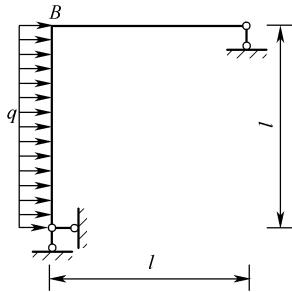


习题 4-8 图

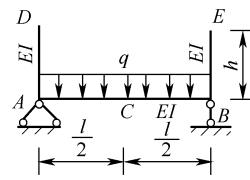
4-9 试求习题 4-9 图所示刚架结点 B 的水平位移  $\Delta$ 。各杆截面为矩形  $bh$ ，惯性矩相等。只考虑弯曲变形的影响。

4-10 试用图乘法计算如习题 4-10 图所示简支刚架中截面 C 的竖向位移  $\Delta_{Cy}$ ，B 点的角位移  $\varphi_B$  和 D、E 两点间的相对水平位移  $\Delta_{DE}$ ，各杆  $EI$  为常数。

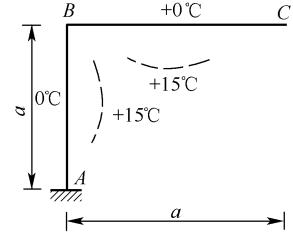
4-11 求习题 4-11 图所示刚架 C 点的竖向位移。刚架内侧（梁下侧和柱右侧）温度升高  $15^{\circ}\text{C}$ ，外侧（梁上侧和柱左侧）温度无改变。 $a = 4\text{ m}$ ， $\alpha = 0.00001$ ，各杆截面为矩形，截面高度  $h = 40\text{ cm}$ 。



习题 4-9 图



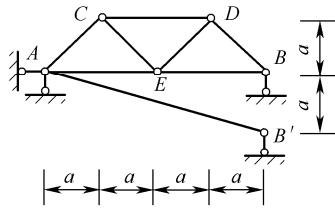
习题 4-10 图



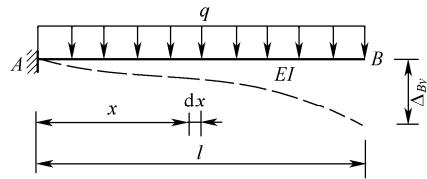
习题 4-11 图

4-12 习题 4-12 图所示桁架的支座 B 向下移动  $\Delta_{By} = c$ ，试求 BD 杆件的角位移  $\theta_{BD}$ 。

4-13 试用虚功互等定理求习题 4-13 图所示线弹性悬臂梁 B 点的竖向位移  $\Delta_{By}$ 。



习题 4-12 图



习题 4-13 图

### 习题参考答案

4-1 (a)  $\Delta = 1\text{ cm}$  ( $\leftarrow$ ); (b)  $\Delta = 0.25\text{ cm}$  ( $\leftarrow$ ); (c)  $\Delta = 0.25\text{ cm}$  ( $\rightarrow$ )

$$4-2 \Delta_{Cx} = \frac{3ql^4}{8EI} \quad (\rightarrow)$$

$$4-3 \Delta_{Cx} = 6.828 \frac{F_p d}{EA} \quad (\downarrow)$$

$$4-4 \Delta_{Cx} = 3.828 \frac{F_p d}{EA} \quad (\rightarrow)$$

$$4-5 \Delta_C = \frac{5F_p l^3}{48EI} \quad (\downarrow)$$

$$4-6 \Delta_B = -\frac{ql^3}{24EI}$$

$$4-7 \Delta_{Cy} = \frac{ql^4}{128EI} \quad (\downarrow)$$

$$4-8 \Delta_{Ay} = \frac{Fl^3}{16EI} \quad (\downarrow)$$

$$4-9 \Delta = \frac{3ql^4}{8EI} \quad (\rightarrow)$$

$$4-10 \Delta_{Cy} = \frac{5ql^4}{384EI} \quad (\downarrow), \quad \varphi_B = -\frac{ql^3}{24EI} \quad (\text{✓}), \quad \Delta_{DE} = \frac{ql^3 h}{12EI} \quad (\rightarrow\leftarrow)$$

$$4-11 \Delta_C = -0.093\text{ cm} \quad (\uparrow)$$

$$4-12 \theta_{BD} = \frac{c}{4a} \text{ rad} \quad (\text{✓})$$

$$4-13 \Delta_{By} = \frac{ql^4}{8EI} \quad (\downarrow)$$