第 2 章　点、直线及平面的投影

点、直线及平面是物体表面的基本几何要素。物体表面的投影是以点、直线及平面的投影为基础的。本章着重叙述点、直线及平面的投影性质和规律。

2.1　投影法的基本知识

2.1.1　投影的概念

我们知道，物体在光源的照射下会在平面上产生图像，此图像为物体在平面上的投影。这种方法称为投影法。工程上的图样就是依据此法绘制的。如图 2-1 所示，设空间有一平面 P，平面外有一定点 S（光源）。若把空间点 A 投影到平面 P 上，可连接 SA 并延长与平面 P 交于 a，点 a 称为空间点 A 在平面 P 上的投影，P 为投影面，S 为投影中心，SAa 为投射线。

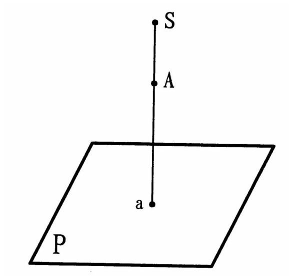


图 2-1　投影的形成

2.1.2　投影法的种类

投影法一般分为两类：中心投影法和平行投影法。

2.1.2.1　中心投影法

一组投射线都通过投影中心，如图 2-2 所示，有如灯光光源照射物体形成影子，称这种投影法为中心投影法。

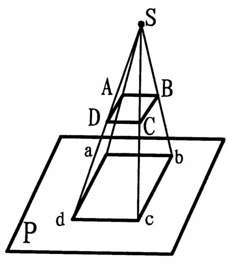


图 2-2　中心投影法

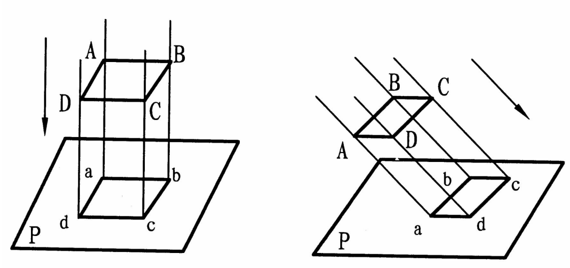
2.1.2.2　平行投影法

一组投射线相互平行，如图 2-3 所示，有如阳光光源照射物体形成影子，称这种投影法为平行投影法。

平行投影法可分为两种：

（1）正投影法。投射线方向垂直于投影面，如图 2-3（a）所示。

（2）斜投影法。投射线方向倾斜于投影面，如图 2-3（b）所示。



（a）　　（b）

图 2-3　平行投影法

用正投影法确定空间几何形体在平面上的投影能正确反映其几何形状和大小，作图也简便，所以在画法几何和工程制图中得到广泛应用。本书主要研究正投影法。

2.2　点的投影

点是最基本的几何要素，本节着重介绍点的投影过程和投影规律。

点的投影仍然是点，而且在一定的条件下是唯一的。图 2-4 中，空间点 A 在 P 投影面上的投影为 a，但是在同样的条件下，仅根据点的一个投影，则不能确定点的空间位置。若仅知道投影 b，则不能确定与之对应的空间点。

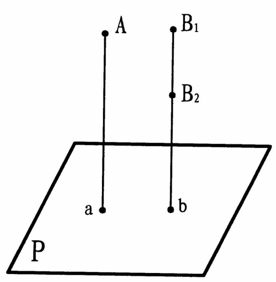


图 2-4　点的投影特点

2.2.1　点在两投影体系中的投影

两投影面体系和点的两面投影

1．两投影面体系的建立

为了确定空间点的位置，设立相互垂直的正立投影面（简称正面）V 和水平投影面（简称水平面）H，组成两投影面体系，如图 2-5 所示。在该投影体系中，每两个投影面的交线称为

投影轴。H 投影面与 V 投影面的交线称为 OX 轴。

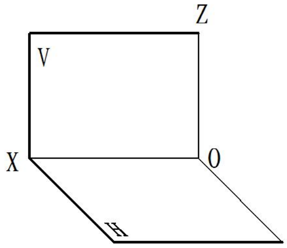
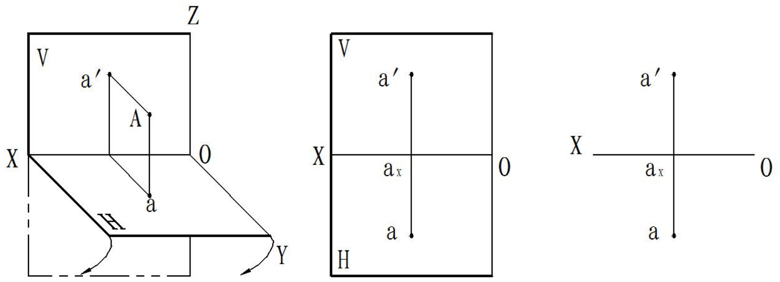


图 2-5　两投影面体系

2．点的投影过程

在两投影面体系中，设有空间点 A，将 A 分别向两个投影面进行投影，则在 H 投影面上的投影称为水平投影（用 a 表示）；点 A 在 V 投影面上的投影称为正面投影（用 a′表示）。于是，点 A 的位置由其两面投影 a 和 a′完全确定，如图 2-6（a）所示。

在实际应用中，将空间点 A 投影后将其移去，再将投影体系连同点的投影展开成一个平面，变成平面投影面体系。其展开方法是：V 面不动，H 面绕 OX 轴向下旋转 90º 与 V 面共面，如图 2-6（b）所示。各投影面可视为无界平面，故去掉其边框，如图 2-6（c）所示。



（a）直观图　　（b）投影面展开图　　（c）点的两面投影图

图 2-6　点在两投影面体系中的投影

3．点的投影规律

由上所述，通过点的投影过程可总结出两投影面体系中点的投影规律如下：

（1）点的正面投影 a′与其水平投影 a 的投影连线垂直于 OX 轴，即 a′a⊥OX。

（2）点的投影到各投影轴的距离等于空间点到相应投影面的距离，即：

$a'a_X$=A a（点 A 到 H 面的距离）；

aa_X=A a′（点 A 到 V 面的距离）。

2.2.2　点在三投影面体系中的投影

2.2.2.1　三投影面体系

点的两面投影虽然已能确定点在空间的位置，为了能更清楚地表达某些几何体，需采用三面投影图，所以再设立一个与 H、V 面都垂直的平面（侧立投影面，简称侧面），以 W 表示。形成三投影面体系，如图 2-7（a）所示。

在该投影体系中，每两个投影面的交线称为投影轴。H 投影面与 V 投影面的交线称为 OX

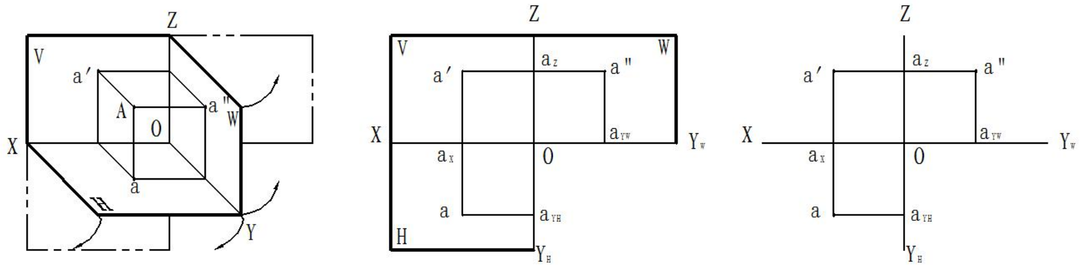
轴，H 投影面与 W 投影面的交线称为 OY 轴，V 投影面与 W 投影面的交线称为 OZ 轴。三个投影轴的交点 O 称为原点。

2.2.2.2　点的投影过程

在三投影面体系中，设有空间点 A，将点 A 分别向三个投影面进行投影，则在 H 投影面上的投影，称为水平投影（用 a 表示）；点 A 在 V 投影面上的投影，称为正面投影（用 a′表示）；点 A 在 W 投影面上的投影，称为侧面投影（用 a″表示）。于是，点 A 的位置由其三面投影 a、a′、a″完全确定，如图 2-7（a）所示。

在实际应用中，将空间点 A 投影后将其移去，再将投影体系连同点的投影展开成一个平面，变成平面投影面体系。其展开方法是：V 面不动，H 面绕 OX 轴向下旋转，W 面绕 OZ 轴向右旋转，各旋转 90º 与 V 面共面，如图 2-7（b）所示。由于 OY 轴为 H 面和 W 面共有，故展开后分别属于 H 和 W 两投影面。以 OY_H 和 OY_W 表示，如图 2-7（b）所示。

各投影面可视为无界平面，故去掉其边框，以相交的投影轴表示三投影面，如图 2-7（c）所示，即 XOZ、XOY_H 和 ZOY_W 分别表示 V、H 和 W 投影面。由于 aa_X、$a''a_Z$ 都反映空间点 A 到 V 面的距离（$aa_X=a''a_Z$），为作图方便和解题的需要，通常自原点 O 引 $\angle Y_HOY_W$ 的等分角线作为辅助线。



（a）　（b）　（c）

图 2-7　点在三投影面体系种的投影

2.2.2.3　点的投影规律

由上所述，通过点的投影过程可总结出三投影面体系中点的投影规律如下：

（1）点的正面投影 a′与其他两投影 a 和 a″连线分别垂直于 OX 轴和 OZ 轴，即 $a'a\perp OX$，$a'a''\perp OZ$。

（2）点的投影到各投影轴的距离，等于空间点到相应投影面的距离，即：

$a'a_X=a''a_{YW}=Aa$（点 A 到 H 面的距离）；

$aa_X=a''a_Z=Aa'$（点 A 到 V 面的距离）；

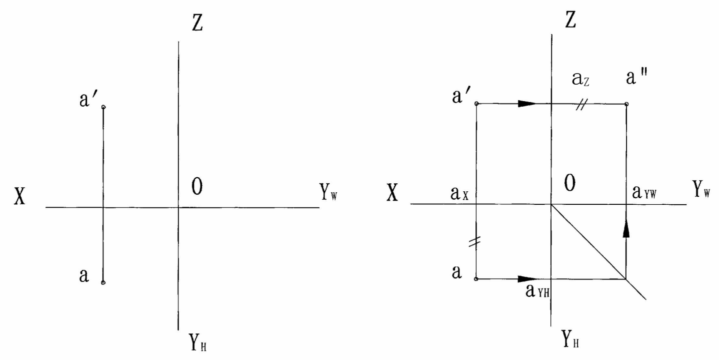
$a'a_Z=aa_{YH}=Aa''$（点 A 到 W 面的距离）。

（3）点的水平投影到 OX 轴的距离等于点的侧面投影到 OZ 轴的距离，即 $aa_X=a''a_Z$。

根据点的任意两个投影和点的投影规律可求出点的第三投影。

例 2-1　已知点 A 的正面投影 a′和水平投影 a，试求其侧面投影 a″，如图 2-8（a）所示。

解：根据点的投影规律可知，a′和 a″连线垂直于 OZ 轴，且 $a''a_Z=aa_X$，由此求得 a″。其作图方法如图 2-8（b）所示，自原点 O 引 $\angle Y_WOY_H$ 等分角线，再自 a′和 a″分别如箭头所示方向引线，其交点即为所求。



（a）　　　　　　　　　　　　（b）

图 2-8　点的投影规律

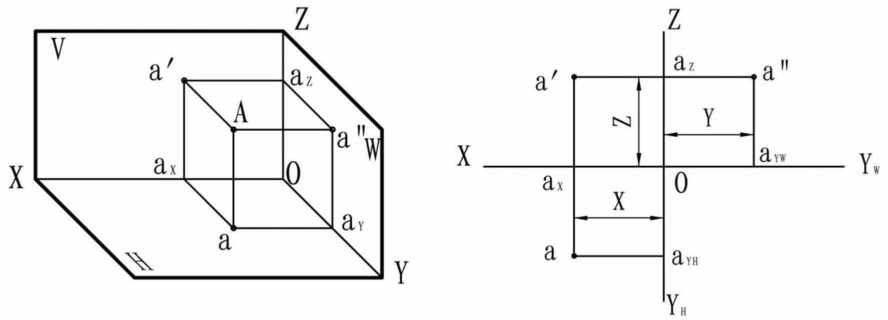
2.2.3　点的投影与坐标

如果把 H、V、W 三个投影面作为直角坐标平面，那么，投影轴就成为坐标轴，O 点即为坐标原点。这样空间点到投影面的距离就可以用坐标表示，如图 2-9 所示。空间点的坐标在投影图上的方向规定：X 坐标自 O 点向左为正，Y 坐标自 O 点向下为正，Z 坐标自 O 点向上为正。由图 2-9 可以看出 A 点的三面投影与坐标有如下关系：

点 A 到 W 面的距离 $Aa''= a'a_Z=Oa_X=x$ 坐标；

点 A 到 H 面的距离 $Aa = a'a_X=Oa_Z=z$ 坐标；

点 A 到 V 面的距离 $Aa'=aa_X=a''a_Z=y$ 坐标。



（a）直观图　　　　　　　　　　（b）投影图

图 2-9　点的投影与坐标

由图 2-9（b）可知，坐标 x 和 z 决定点的正面投影 a′，坐标 x 和 y 决定点的水平投影 a，坐标 z 和 y 决定点的侧正面投影 a″。因此，当已知点的坐标(x,y,z)，即可作出点的投影；反之，知道点的投影，亦可测得点的坐标值。

例 2-2　已知 A 点的坐标 A(18,15,20)，作出点 A 的三面投影。

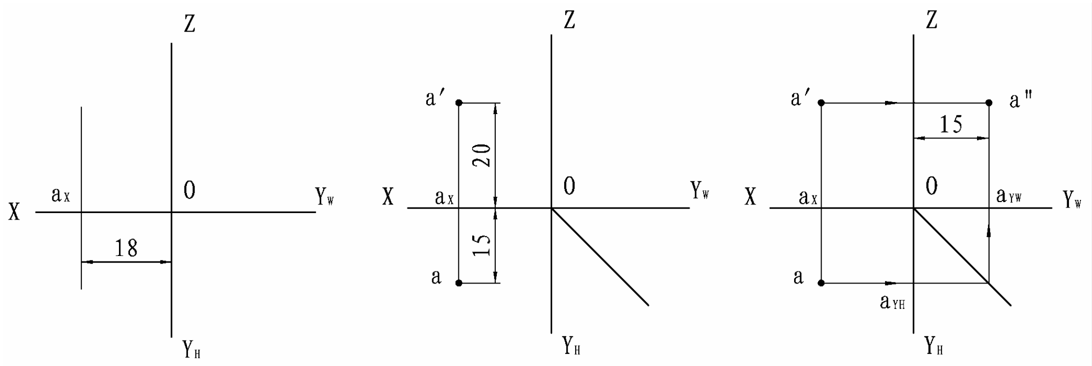
其作图方法与步骤如图 2-10 所示。

（1）画坐标轴，在 OX 轴上自 O 向左量取 18mm，即 X 坐标，定出 a_x。

（2）过 a_x 作 OX 轴的垂直线，并从 a_x 向下量取 aa_x=15mm，得 a 点，从 a_x 向上量取 aa_x=20mm，得 a′点。

（3）过 a′作 OZ 轴的垂直线，过 a 作 OY_H 轴的垂直线，再用 45°分角线或圆弧求得 a″。

即完成 A 点的三面投影。



（a）　　　　（b）　　　　（c）

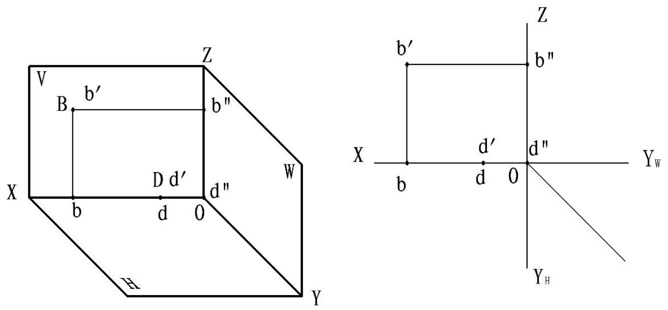
图 2-10　由点的坐标求点的三面投影

2.2.4　特殊位置点的投影

由于空间点所处位置不同，有的点的某一投影表现为特殊性，称这样的点为特殊位置点，一般有下列两种情况。

1. 投影面上的点

若点在某投影面上，则其投影特点是点距该投影面的距离为零，在该投影面上的投影与空间点重合，其另两面投影在投影轴上。图 2-11（a）中，点 B 在 V 面上，根据点的投影规律，反映为点 B 到 V 面距离为零，b′与 B 重合，其水平投影 b 在 OX 轴上，其侧面投影 b″在 OZ 轴上，如图 2-11（b）所示。



（a）　　　　（b）

图 2-11　特殊点的投影

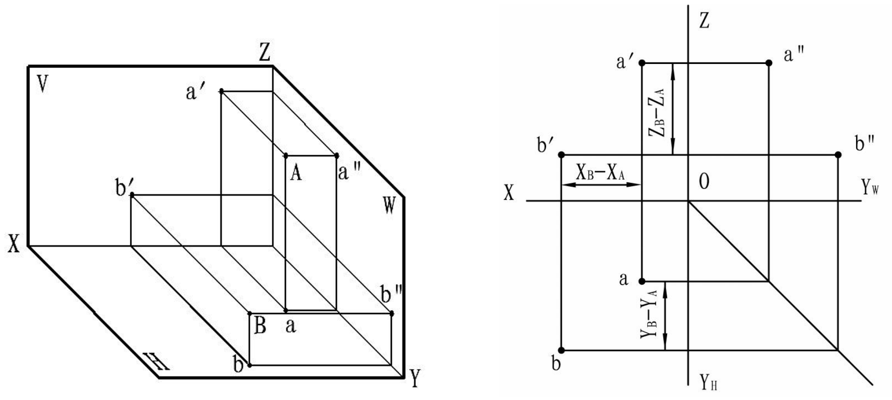
2. 投影轴上的点

若点在投影轴上，即为两投影面所共有，其投影特点为在该两投影面上的投影与空间点重合，一个投影与原点 O 重合，如图 2-11（a）、（b）中的点 D。

2.2.5　两点的相对位置与重合投影

若已知两点的投影，便可根据点的投影对应关系，判别它们在空间的相对位置。如图 2-12 所示，已知点 A 和点 B 的三面投影，则由两点的投影沿左右、前后、上下三个方向所反映的

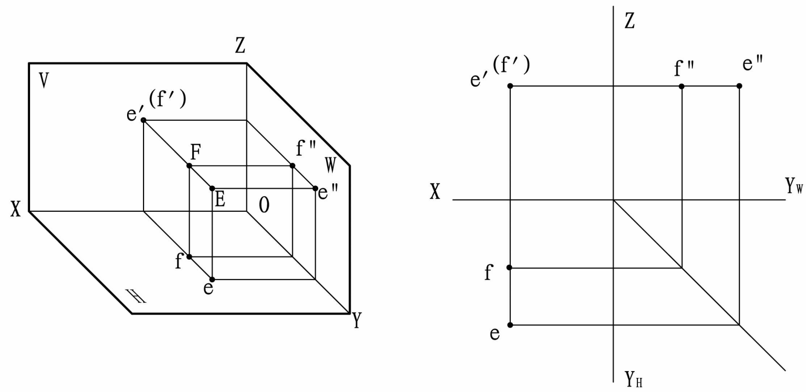
坐标差，可知点 B 在点 A 的左、前、下方，（X 坐标大在左，Y 坐标大在前，Z 坐标大在上）。反之，若已知两点的相对位置及其中一点的投影，便可作出另一点的投影。



（a）立体图　　　　（b）投影图

图 2-12　两点的相对位置

我们把与投影面相垂直的同一条投射线上的两点称为该投影面的重影点，此两点在该投影面上的投影重合为一点，如图 2-13 所示，E、F 两点即为 V 面的重影点。



（a）　　　　（b）

图 2-13　点的重合投影

重影点在某投影面的重合投影，由于两点的相对位置关系而存在一个可见与不可见的问题。图 2-13 中，e′和 f′为重合投影（$x_E-x_F=0$，$z_E-z_F=0$）。由其水平投影可知点 E 在前，点 F 在后，所以 e′为可见，f′为不可见，并以（f′）表示。重合投影可见性的判别方法，就是利用具有坐标差的另一投影进行，并将不可见的投影加以小括号表示。

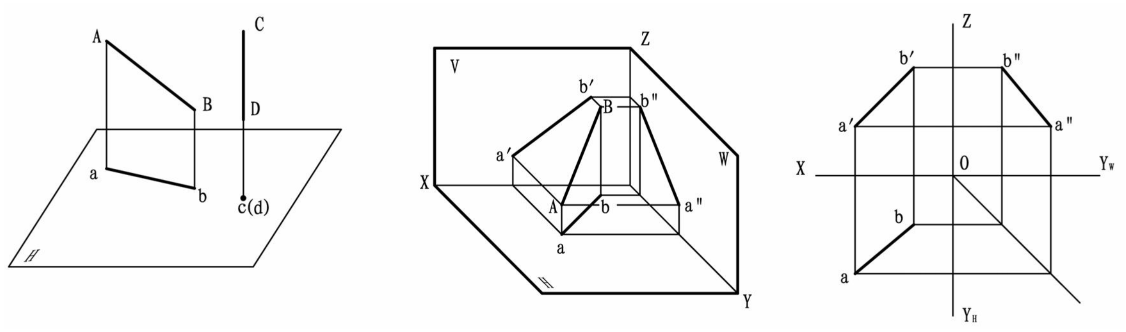
2.3　直线的投影

2.3.1　直线的投影

2.3.1.1　直线的投影特性

根据“两点确定一直线”的几何条件，空间直线的投影可由直线上任意两点的投影确定。

通常是取直线段两端点间连线表示，即作出直线上两端点投影后，将同面投影连接起来便得到直线的投影图。直线的投影一般仍为直线，当直线垂直于投影面时，其投影积聚为一点，如图 2-14（a）的点 c 所示。



（a）　（b）　（c）

图 2-14　直线的投影

2.3.1.2　直线的三面投影

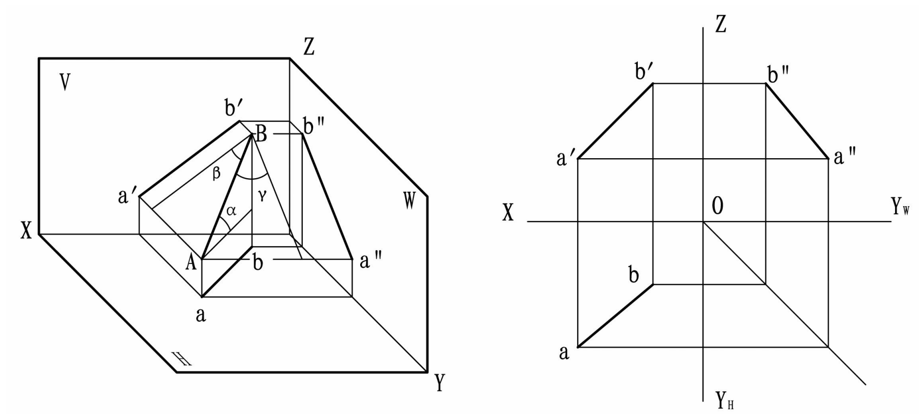
直线的三面投影可由直线上两点的同面投影连线来确定，如图 2-14（b）、（c）所示。

2.3.2　直线与投影面的相对位置及其投影特性

在三投影面体系中，直线与投影面的相对位置可分为一般位置直线和特殊位置直线。下面分别介绍它们的投影特性。

2.3.2.1　一般位置直线的投影

同时倾斜于三个投影面的直线称为一般位置直线，如图 2-15 中的直线 AB。一般位置直线对 H、V 和 W 三投影面的倾角分别以α、β 和 γ 表示，于是有 ab=ABcosα，a′b′=ABcosβ，a″b″=ABcosγ，由此可知一般直线的各投影均小于实长，且各投影与相应投影轴的夹角均不能反映在空间该直线与相应投影面的真实倾角。



（a）　（b）

图 2-15　一般位置直线的投影

2.3.2.2　特殊位置直线的投影

特殊位置直线可分为两类，即投影面平行线和投影面垂直线。

1. 投影面平行线

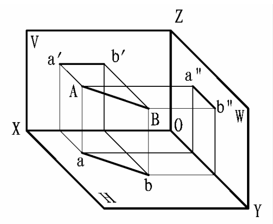
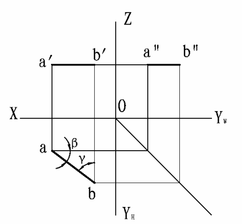
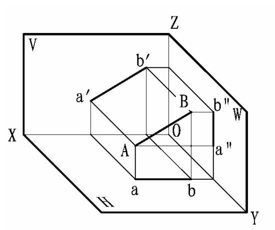
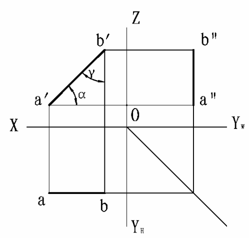
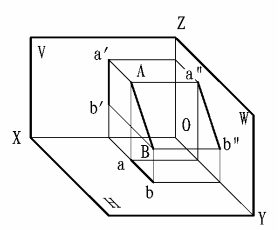
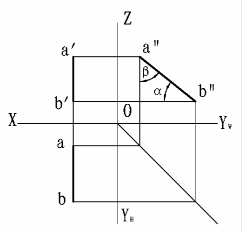
平行于一个投影面而与另外两个投影面倾斜的直线称为投影面平行线。平行于 H 面的直线称为水平线；平行于 V 面的直线称为正平线；平行于 W 面的直线称为侧平线。因为投影面平行线上各点与其所平行的投影面距离相等，所以它具有如下投影性质：

（1）直线在其所平行的投影面上的投影反映实长，该投影与两投影轴的夹角分别反映直线对相应投影面的倾角。

（2）直线的其余两投影平行于相应的投影轴。

各平行线的投影性质，参看表 2-1。

表 2-1 投影面的平行线

名称	轴 测 图	投 影 图	投 影 性 质
水平线			（1）ab=AB （2）a′b′∥OX a″b″∥OY （3）反映 β、γ 实角
正平线			（1）a′b′=AB （2）ab∥OX a″b″∥OZ （3）反映α、γ 实角
侧平线			（1）a″b″=AB （2）a′b′∥OZ ab∥OY_H （3）反映α、β 实角

2. 投影面垂直线

垂直于投影面的直线称为投影面垂直线。垂直于 H 面的直线称为铅垂线；垂直于 V 面的直线称为正垂线；垂直于 W 面的直线称为侧垂线。因为某投影面的垂直线必同时平行于其余两投影面，所以它有如下投影性质：

（1）直线在其所垂直的投影面上的投影积聚为一点。

（2）直线的其余两投影垂直于相应投影轴且反映实长。

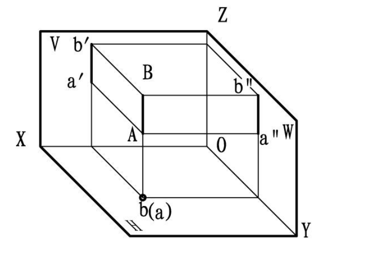
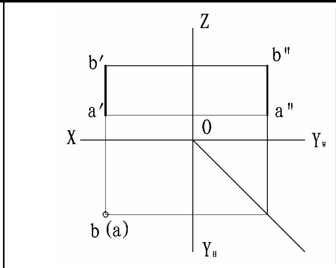
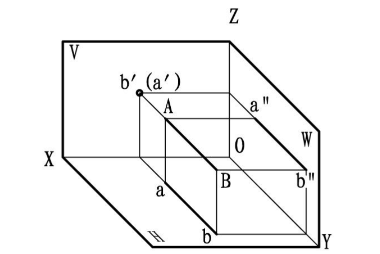
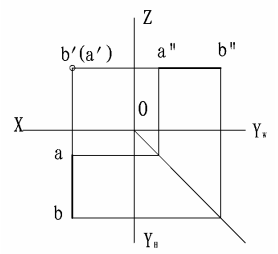
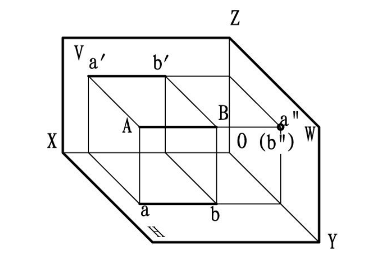
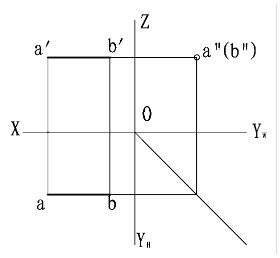
各垂直线的投影性质，参看表 2-2。

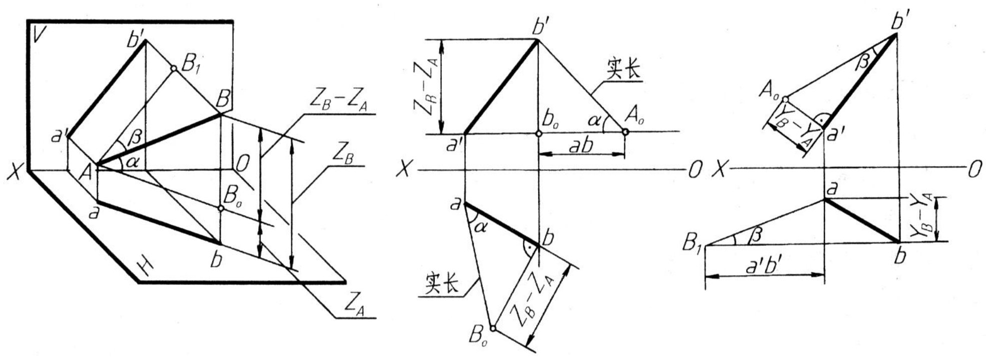
*2.3.2.3 求一般位置直线的实长和对投影面的倾角

一般位置直线的投影在投影图上不反映线段实长和对投影面的倾角。但在工程上往往要求在投影图上用作图方法解决这类度量问题。根据直线的投影求其实长及倾角的真实大小，在实际应用中，可采用直角三角形法求得。如图 2-16 所示，直线 AB 为一般位置直线，过 A 作

$AB_0 // ab$，即得一直角三角形 ABB_0，它的斜边 AB 即为其实长，$AB_0=ab$，BB_0 即为 A、B 的 Z 坐标差（Z_B-Z_A），AB 与 AB_0 的夹角即为 AB 对 H 面的倾角α。这种求实长和倾角的方法称为直角三角形法。

表 2-2　投影面的垂直线

名称	轴　测　图	投　影　图	投　影　性　质
铅垂线			（1）ab 积聚为一点 （2）$a'b' \perp OX$ $a''b'' \perp OY_W$ 且 $a'b'=a''b''=AB$
正垂线			（1）a′b′积聚为一点 （2）$a'b' \perp OX$ $a''b'' \perp OZ$ 且 $ab= a''b''=AB$
侧垂线			（1）a″b″积聚为一点 （2）$ab \perp OY_H$ $a'b' \perp OZ$ 且 $ab= a'b'=AB$



（a）　　　　（b）　　　　（c）

图 2-16　直角三角形法求实长及倾角

同理，另一直角三角形 ABB_1 的斜边 AB 为实长，$AB_1=a'b'$，BB_1 为 Y 坐标差（Y_B-Y_A），AB 与 AB_1 的夹角即为 AB 对 V 面的倾角 β。

求直线 AB 的实长和对 H 面的倾角α可用下列两种方式作图：

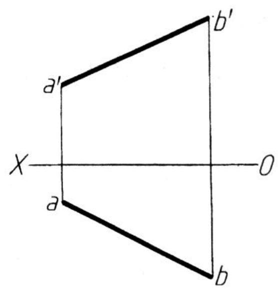
（1）如图 2-16（b）所示，过 b 作 ab 的垂线 bB_0，在此垂线上量取 $bB_0=(Z_B–Z_A)$，则 aB_0 即为所求的直线 AB 的实长，$\angle B_0ab$ 即为α角。

（2）过 a′作 X 轴的平行线，与 b′b 相交于 b_0（$b'b_0= Z_B–Z_A$），量取 $b_0A_0=ab$，则 $b'A_0$ 也是所求直线的实长，$\angle b'A_0b_0$ 即为α角。

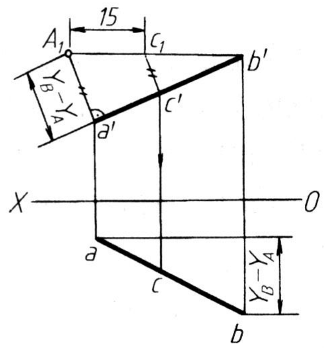
同理，用类似作法可作直线 AB 对 V 面的倾角 β，如图 2-16（c）所示。

例 2-3 如图 2-17（a）所示，已知直线 AB 的 V、H 面投影，求出直线 AB 上距 A 点 15mm 的点 C 的两面投影。

解：（1）以 V 面投影 a′b′为一直角边，过 a′作 $a'A_1\perp a'b'$，取 $a'A_1= Y_B–Y_A$，连线 A_1、b′，A_1b'即为直线 AB 的实长，如图 2-17（b）所示。



（a）



（b）

图 2-17 直角三角形法求定点

（2）在 A_1b'上自 A_1 量取 15mm 得 C_1 点。

（3）过 C_1 点作 A_1a'的平行线，与 a′b′交于 c′，并作出其水平投影 c。

2.3.3 直线上的点

（1）若点在直线上，则该点的各投影必在该直线的同名投影上。反之，若点的各投影分别在直线的各同名投影上，则该点必在此直线上。一般情况由点和直线的两面投影即可判断点是否在直线上。如图 2-18 所示，k 在 ab 上，k′在 a′b′上，则点 K 必在直线 AB 上。

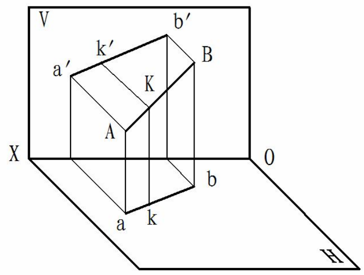


图 2-18 直线上的点

（2）线段上的点分线段所成的比例在其各投影上保持不变。若点 K 把 AB 线段分为 AK:KB=1:2，则 AK:KB=a′k′: k′b′=a″k″: k″b″=1:2。反之亦成立。

2.3.4　两直线的相对位置

两直线的相对位置有平行、相交和交叉三种情况，前两种为同面两直线，后一种为异面两直线。

2.3.4.1　平行两直线

若两直线平行，其各同名投影必平行。反之，若两直线的各同名投影平行，则该两直线必平行。

若两直线均为一般位置直线时，只要检查两面投影即可判定，如图 2-19 所示，ab//cd，a′b′//c′d′，所以，AB//CD。若两直线为某投影面平行线时，视其在所平行的投影面上的投影是否平行而判定，如图 2-20 所示，虽然 k′l′// m′n′，kl//mn。但两直线均为侧平线，而侧面投影 k″l″不平行于 m″n″，所以，KL 不平行于 MN。

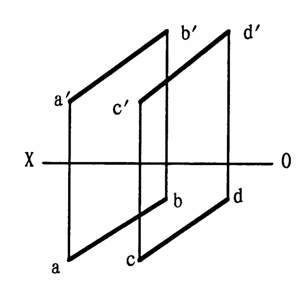


图 2-19　平行两直线

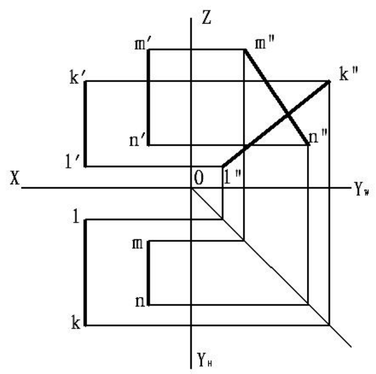


图 2-20　判断两直线的相对位置

2.3.4.2　相交两直线

若两直线相交，其各同名投影必相交，且交点的投影符合点的投影规律。反之，若两直线的各同名投影均相交，且交点连线垂直于投影轴，则该两直线必相交，在一般情况下，只要检查两面投影即可判定。如图 2-21 所示，k′为 a′b′和 c′d′的共有点，k 为 ab 和 cd 的共有点，且 k′k 垂直于 OX 轴，所以直线 AB 和 CD 为两相交直线，其交点为 K。

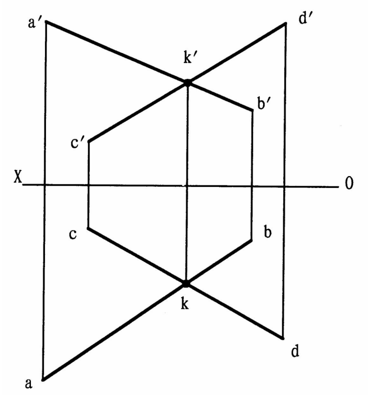


图 2-21　相交两直线

2.3.4.3　交叉两直线

既不平行又不相交的两直线称为交叉两直线。在投影图上，若两直线的各同名投影不具有平行两直线的投影性质，也不具有相交两直线的投影性质，则可判定为交叉两直线。图 2-22 和图 2-23 为交叉两直线，交叉两直线出现重影点，根据重影点的可见性判别两直线空间的相对位置。图 2-22 中，其水平投影的交点 1（2），为直线 AB 上点 I 和直线 CD 上点 II 的水平重影点，因为 1′的 Z 坐标值大于 2′的 Z 坐标值，所以直线 AB 在直线 CD 上方；同理，图 2-23 中从正面重影点可以判别出水平投影点 3 在前，点 4 在后，所以直线 AB 在直线 CD 的前方。

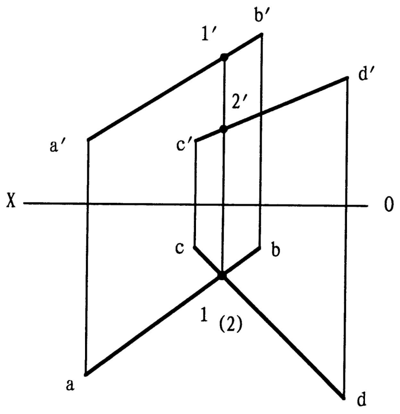


图 2-22　交叉两直线

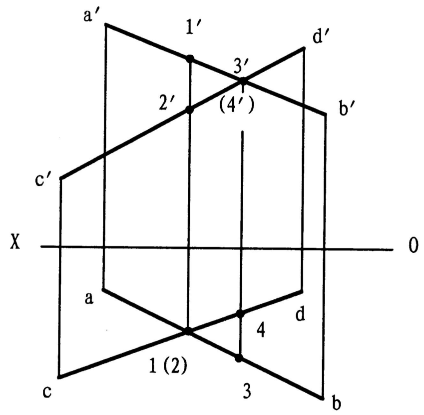


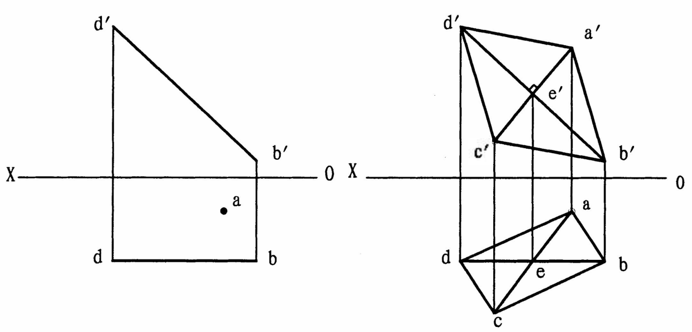
图 2-23　重影点的判断

2.3.5　直角投影定理

定理：垂直相交的两直线，若其中一直线平行于某投影面，则两直线在该投影面上的投影反映直角。证明从略。

逆定理：若相交两直线在某投影面上的投影为直角，且其中一直线与该投影面平行，则该两直线在空间必相互垂直。

例 2-4　已知菱形 ABCD 的对角线 BD 的投影 bd、b′d′，及另一对角线 AC 端点 A 的水平投影 a，如图 2-24（a）所示，试完成菱形的两面投影。



（a）　　　　（b）

图 2-24　直角投影定理的应用

解：根据菱形对角线相互垂直且平分的性质，可先确定 BD 的中点 E，因 BD 是正平线，

根据直角投影定理可知，a′c′⊥b′d′，而求得 a′，并可确定 a′c′，再作出其水平投影 ac，便可得菱形的两面投影 abcd 和 a′b′c′d′，如图 2-24（b）所示。

2.4　平面的投影

2.4.1　平面的表示方法

在投影图上，通常用如下五组几何要素中的一组表示平面，①不在一直线上的三点；②直线和直线外一点；③相交两直线；④平行两直线；⑤任意平面图形（三角形、圆及其他图形），如图 2-25 所示。

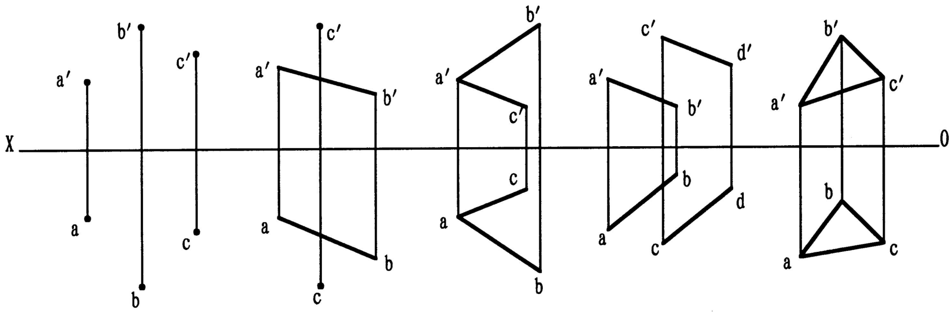


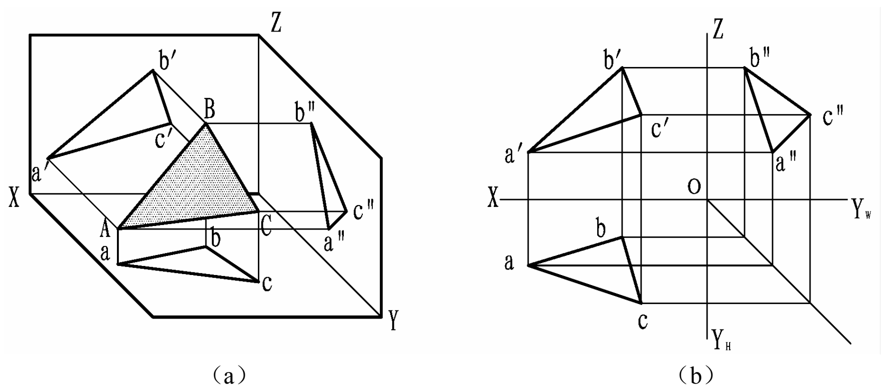
图 2-25　平面的表示方法

2.4.2　各种位置平面的投影特性

在三投影面体系中，平面对投影面的相对位置有一般位置和特殊位置。下面分别叙述它们的投影特性。

2.4.2.1　一般位置平面

与三个投影面都倾斜的平面称为一般位置平面，平面与 H、V 和 W 面的倾角分别用α、β、γ 表示。由于一般位置平面与三个投影面均倾斜，所以它们的投影仍是平面图形，且面积缩小，如图 2-26 中的△ABC。



（a）　（b）

图 2-26　一般位置平面的投影

2.4.2.2　特殊位置平面

特殊位置平面包括：

（1）投影面垂直面。投影面垂直面是指垂直于一个投影面而倾斜于另外两个投影面的平面。按所垂直的投影面不同分为铅垂面（⊥H）、正垂面（⊥V）和侧垂面（⊥W）。

（2）投影面平行面。投影面平行面是指平行于一个投影面而垂直于另外两个投影面的平面。投影面平行面也有三种，分别是水平面（∥H），正平面（∥V）和侧平面（∥W）。

特殊位置平面的投影特性见表 2-3、表 2-4。

表 2-3　投影面垂直面

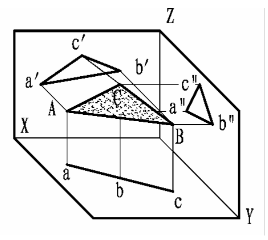
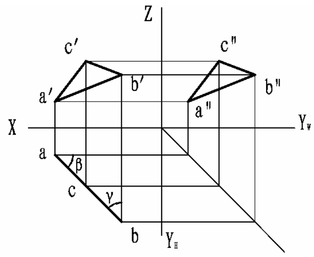
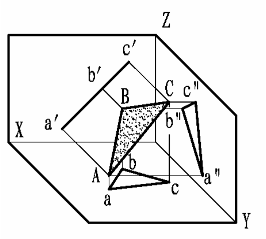
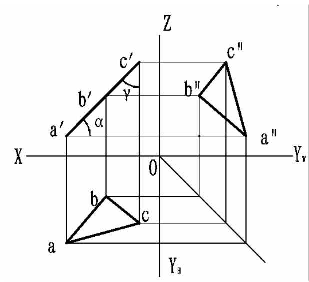
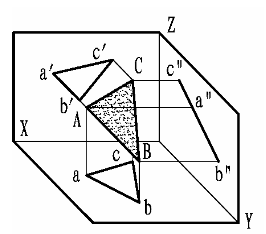
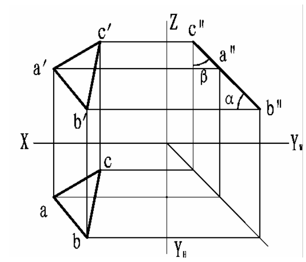
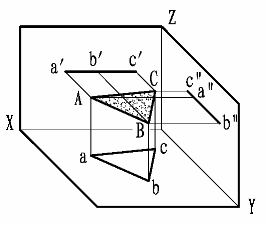
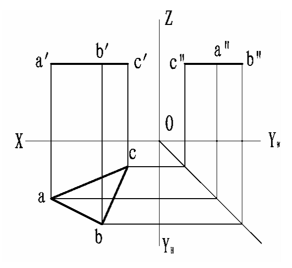
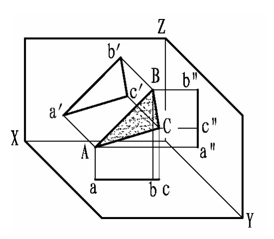
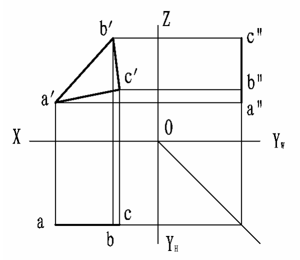
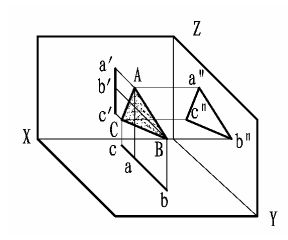
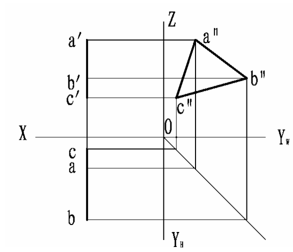
名称	轴测图	投影图	投影性质
铅垂面			（1）水平投影积聚为一条直线且反映 β、γ 实角 （2）V、W 面投影为缩小的三角形
正垂面			（1）正面投影积聚为一条直线且反映α、γ 实角 （2）H、W 面投影为缩小的三角形
侧垂面			（1）侧面投影积聚为一条直线且反映α、β 实角 （2）V、H 面投影为缩小的三角形

表 2-4　投影面平行面

名称	轴测图	投影图	投影性质
水平面			（1）水平投影反映实形 （2）V 面投影积聚为一直线且//OX，W 面投影积聚为一直线且//OY_W

续表

名称	轴测图	投影图	投影性质
正平面			（1）正面投影反映实形 （2）H 面投影积聚为一直线且//OX，W 面投影积聚为一直线且//OZ
侧平面			（1）侧面投影反映实形 （2）V 面投影积聚为一直线且//OZ，H 面投影积聚为一直线且//OY_H

2.4.3　平面内的点和直线

2.4.3.1　平面内取点

点在平面内，则该点必在此平面内的一条直线上。因此，在平面内取点，要取在平面内的已知直线上。图 2-27 为在相交两直线 AB 和 BC 所确定的平面内取任一点 M（m，m′），此点取在已知直线 BC 上，即在 bc 上取 m，在 b′c′上取 m′，则此点必在该平面内。据此可判别点是否在平面内，当仅知点的一个投影求另一投影时，则利用在平面内取点的方法，过该点作直线求之。

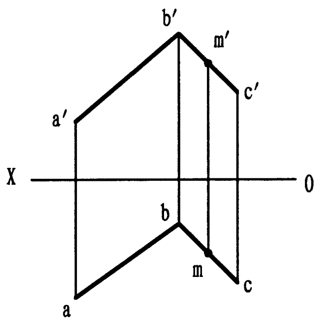


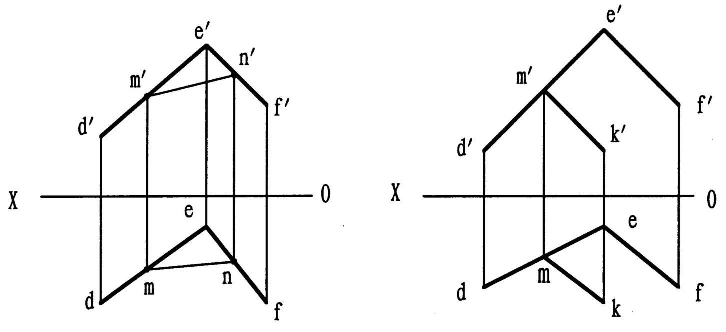
图 2-27　平面内取点

2.4.3.2　平面内取直线

直线在平面内，则该直线必通过此平面内的两个点；或通过此平面的一个点，且平行于此平面内的另一已知直线，这是直线在平面内的存在条件。在平面内取直线，依此条件可在平面内取两个已知点连线或取一已知点，过该点作平面内已知直线的平行线。

图 2-28 为在相交两直线 DE 和 EF 所确定的平面内取直线，其中图 2-28（a）为在平面内取两点 M（m，m′）和 N（n，n′），直线 MN 必在该平面内。图 2-28（b）为过 M（m，m′）作直

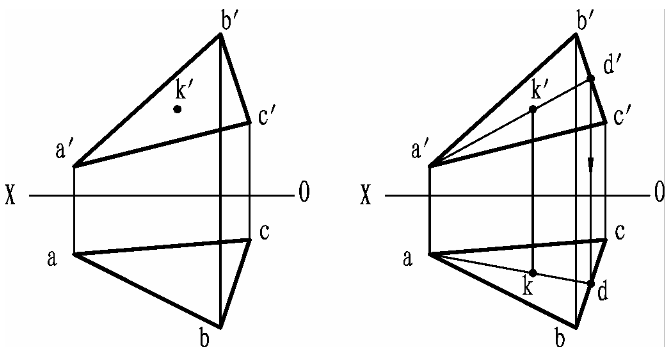
线 MK//EF，则直线 MK 必在该平面内。在平面内取点，要先在平面内取直线，而取直线又离不开点，二者互相应用，联系紧密，但其基础为在平面内取已知点。



（a）　　（b）

图 2-28　平面内取直线

例 2-5　在△ABC 所确定的平面内取一点 K，已知其正面投影 k′，求水平投影 k（见图 2-29（a））。



（a）　　（b）

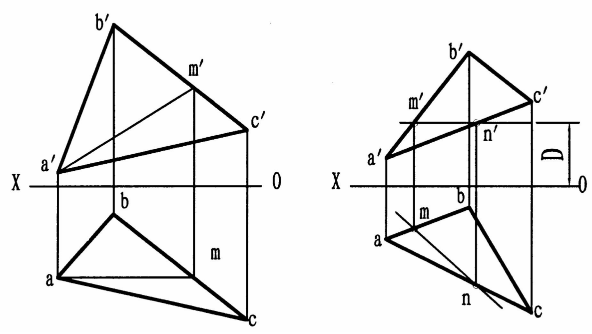
图 2-29　平面内点的求解

解：根据点在平面内的条件，过点 K 在△ABC 内作一直线 AK 交 BC 于 D，连接 a′k′延长交 b′c′于 d′，由 a′d′得 ad，因直线 AD 过点 K，所以 k′在 a′d′上，k 必在 ad 上，由此求得 k。

2.4.3.3　平面内的投影面平行线

在平面内可以取任意直线，但在实际应用中，为作图方便，常常是取平面内的投影面平行线。平面内的投影面平行线有三种：平面内的水平线、正平线和侧平线。这些线既要符合投影面平行线的投影特性，又要符合从属于平面的特性，因此其投影特点具有双重性。图 2-30（a）中△ABC 为给定平面，AM 为该平面内的正平线。根据正平线的投影特性，am∥OX 轴，a′m′=AM（实长）。

在图 2-30（a）中，是过△ABC 上 A 点作的一条正平线 AM，在图 2-30（b）中是过△ABC 上距离 H 面为 D 的一条水平线 MN。平面内的平行线常被用作解题的辅助线。



（a）　　　　　　　　　　　（b）

图 2-30　平面内取特殊位置直线

2.5　直线与平面、平面与平面的相对位置

直线与平面、平面与平面的相对位置包括：直线与平面平行；两平面平行；直线与平面相交；两平面相交；直线与平面垂直；两平面垂直。本节着重讨论在投影图上如何绘制和判别它们之间的平行、相交和垂直的问题。

2.5.1　直线与平面平行、两平面平行

2.5.1.1　直线与平面平行

如果空间一直线与平面上任一直线平行，那么此直线与该平面平行。如图 2-31 所示，直线 AB 平行于平面 P 上的直线 CD，那么直线 AB 与平面 P 平行；反之，如果直线 AB 与平面 P 平行，则在平面 P 上必可以找到与直线 AB 平行的直线 CD。

上述原理是解决直线与平面平行问题的依据。

例 2-6　如图 2-32（a）所示，过点 C 作平面平行于已知直线 AB。

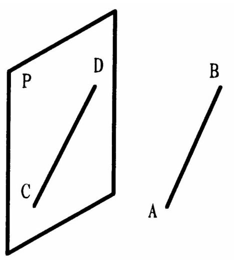
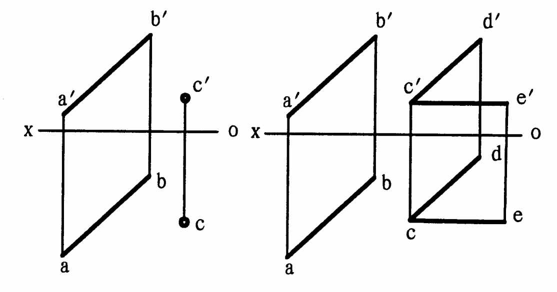


图 2-31　直线与平面平行的条件



（a）　　　　　　　　（b）

图 2-32　过定点作平面平行于已知直线

解：如图 2-32（b）所示，过点 C 作 CD∥AB（即作 cd∥ab，c′d′∥a′b′），再过点 C 作任意直线 CE，则相交两直线 CD、CE 确定的平面即为所求。

显然，由于直线 CE 可以任意作出，所以此题可以作无数个平面平行于已知直线。

2.5.1.2　平面与平面平行

如果平面上的两条相交直线分别与另一平面上相交的两直线平行，那么该两平面互相平

行，如图 2-33 所示。

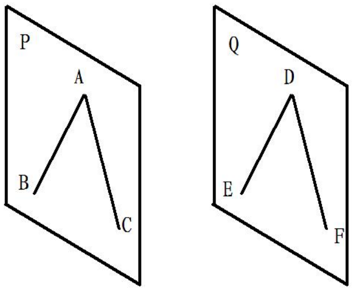


图 2-33　两平面平行的几何条件

例 2-7　判别△ABC 与△DEF 是否平行（见图 2-34）。

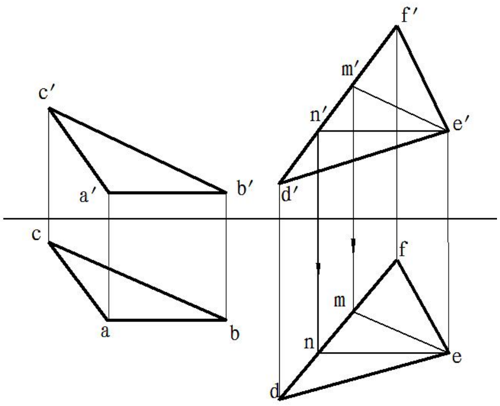


图 2-34　判别两平面是否平行

解：首先在其中一个平面内作出一对相交直线，然后在另一平面内，视其能否作出与之对应平行的一对相交直线。为此可在△DEF 内过点 E 作两条直线 EM 和 EN，使 e′m′∥b′c′，e′n′∥a′b′，然后作出 em 和 en，因为 em∥bc，en∥ab，所以△ABC∥△DEF。

2.5.2　直线与平面相交、两平面相交

2.5.2.1　直线与平面相交

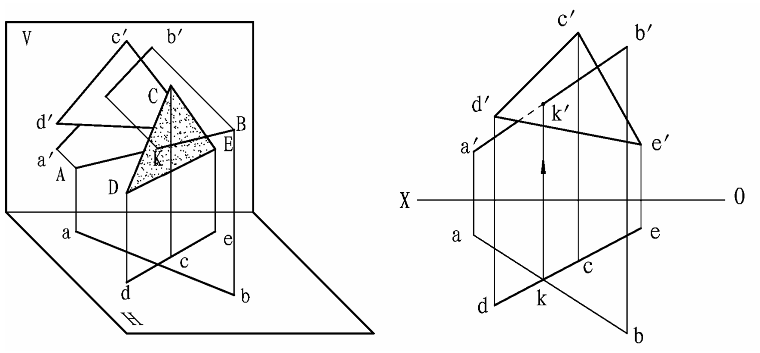
直线与平面相交，其交点是直线和平面的共有点，它既在直线上又在平面上。当直线或平面与某一投影面垂直时，则可利用其投影的积聚性，在投影图上直接求得交点。

例 2-8　如图 2-35（a）所示，求直线 AB 与铅垂面 CDE 的交点。

解：△CDE 的水平投影 cde 积聚为一条直线，交点 K 是平面和直线的共有点，其水平投影既在 cde 上，又在直线 AB 的水平投影 ab 上，所以 cde 和 ab 的交点 k 即为交点 K 的水平投影。再由 k′在 a′b′上求得 k′，则点 K（k，k′）即为所求，如图 2-35（b）所示。

判别可见性：由于平面在交点处把直线分为两部分，以交点为界，直线的一部分为可见，另一部分被平面遮盖为不可见。为图形清晰起见，规定不可见部分用虚线表示。交点为可见与不可见的分界点。可见性是利用重影点来判别的，在图 2-35（b）中，正面投影 a′b′与 c′e′的交点为两点的重影点，此重影点分别为直线 AB 上的点Ⅰ和直线 CE 上的点Ⅱ的正面投影，从水

平投影 Y 坐标值看，$y_1>y_2$，即在重影点处直线 AB 以交点 K 为界，右段在前，左段在后，所以正面投影以 k′为界，k′b′为可见，k′a′被三角形遮盖部分为不可见，用虚线表示。判断某个投影的可见性时，可在该投影图上任取一个重影点进行判别。



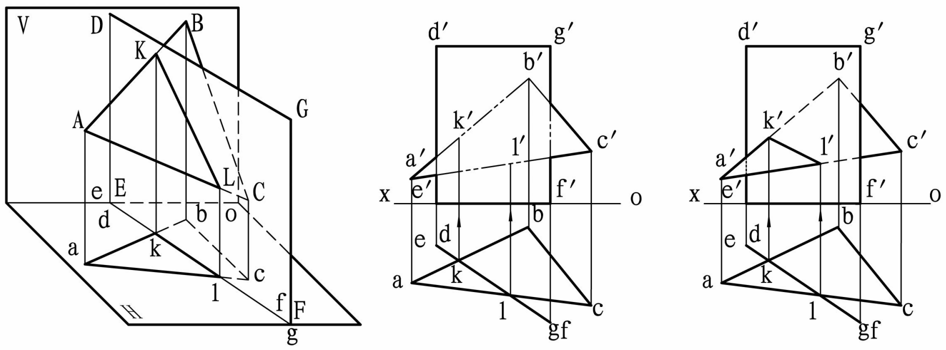
（a）　　（b）

图 2-35　直线与特殊位置平面相交

2.5.2.2　平面与平面相交

空间两平面若不平行就必定相交。相交两平面的交线是一条直线，该交线为两平面的共有线，交线上的每个点都是两平面的共有点。当求作交线时，只要求出两个共有点即可。

例 2-9　求△ABC 与铅垂面 DEFG 的交线（见图 2-36）。



（a）　　（b）　　（c）

图 2-36　平面与铅垂面交线的求法

解：因为铅垂面 DEFG 的水平投影 defg 有积聚性，按交线的性质，铅垂面与平面 ABC 的交线的水平投影必在 defg 上，同时又应在平面 ABC 的水平投影上，因而可确定交线 KL 的水平投影 kl，进而求得 k′l′，如图 2-36（c）所示。

2.5.3　直线与平面垂直、两平面垂直

2.5.3.1　直线与平面垂直

由初等几何可知，如果一直线垂直于一平面，则此直线必垂直于该平面内的一切直线，其中包括平面内的水平线和正平线。在图 2-37 中，直线 AB 垂直于平面 P，则必垂直于平面 P 内的一切直线，其中包括水平线 CD 和正平线 EF。根据直角投影定理，在投影图上，必是直线 AB 的水平投影垂直于水平线 CD 的水平投影（ab⊥cd），直线 AB 的正面投影垂直于正平

线 EF 的正面投影（a′b′⊥e′f′）。反之，在投影图上，若直线的水平投影垂直于平面内水平线的水平投影，直线的正面投影垂直于平面内的正平线的正面投影，则直线必垂直于该平面。如图 2-38 所示，相交的水平线 CD 和正平线 EF 给定一平面，令直线 AB 垂直于该平面，则水平投影 ab⊥cd，正面投影 a′b′⊥e′f′。

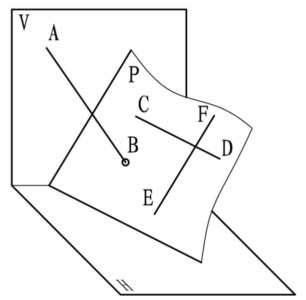


图 2-37　直线与平面垂直

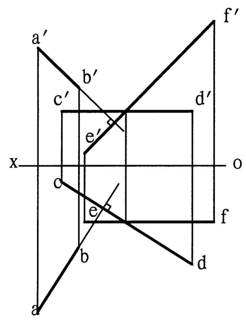
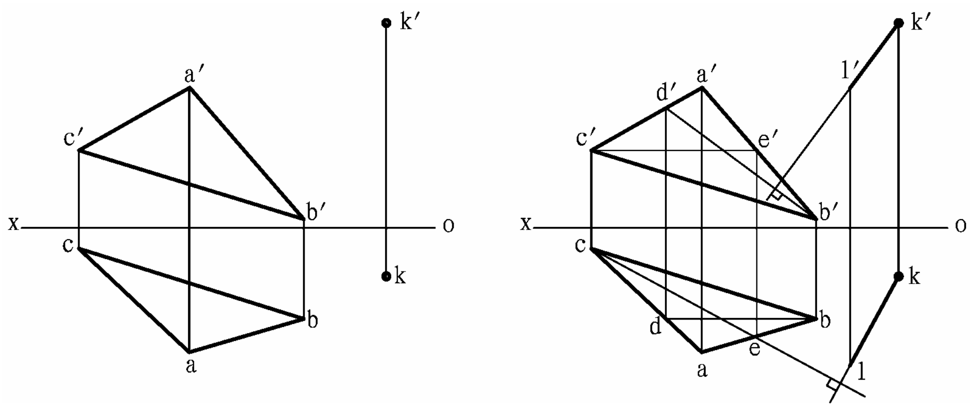


图 2-38　作直线与平面垂直的方法

例 2-10　试过定点 K 作平面（△ABC）的垂线 KL（见图 2-39）。



（a）　（b）

图 2-39　过定点作平面的垂线

解：只要能知道垂线两投影的方向就可以作出。为此，作平面内任意正平线 BD 和水平线 CE，过 k′作 b′d′的垂线 k′l′，过 k 作 ce 的垂线 kl，KL 即为△ABC 的垂线。应用直线垂直于平面的条件，可解确定点到平面的距离问题。

2.5.3.2　两平面相互垂直

根据初等几何定理，如果一直线垂直于一平面，则过此直线的所有平面都垂直于该平面。反之，如果两平面相互垂直，则由第一平面内的任意一点向第二平面作垂线，该垂线一定在第一平面内。图 2-40 直线 KL 垂直于平面 P，则通过直线 KL 的平面 N、S、R 等都与该平面垂直。

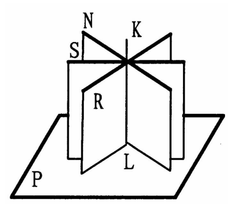
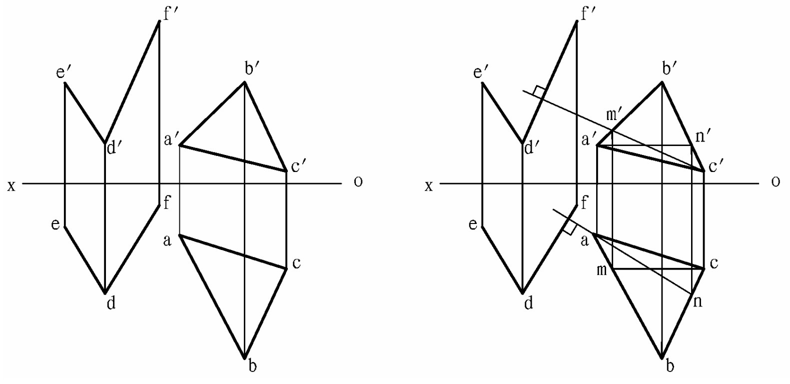


图 2-40　两平面垂直的条件

例 2-11　过直线 DE 作一平面与△ABC 垂直。

解：根据上述定理，只要过直线 DE 上的任意点作垂直于△ABC 的直线，则此直线与已知直线所组成的平面即为所求，见图 2-41。



（a）　　　　　　　　　　　　　（b）

图 2-41　过直线作平面与已知平面垂直

在△ABC 内作水平线 AN 及正平线 CM，过直线 DE 上的 D 点作△ABC 的垂线 DF（即 d′f′⊥c′m′，df⊥an），则由相交两直线 DE、DF 组成的平面即为所求。

2.6　换面法

2.6.1　概述

从前面章节可知，当直线或平面相对投影面处于特殊位置时，其定位或度量问题就比较容易解决。为了解题的需要，空间几何元素不动，设置一个新的投影面替换原投影体系中的某一投影面，组成一个新的投影体系，使相应的几何元素在该投影体系中处于特殊位置，达到简化解题的目的，这种方法称为变换投影面法，简称换面法。如图 2-42 所示，△ABC 在原投影面体系中是铅垂面，其两个投影均不反映实形。现设置一个新投影面 V_1，使 V_1 面垂直于 H 面并与△ABC 平行，于是组成了一个新投影面体系 V_1/H，V_1 面与 H 面交线 O_1X_1 为新投影轴。在这个新投影体系中，△ABC 是 V_1 面的平行面，所以它在 V_1 面上的投影反映实形。

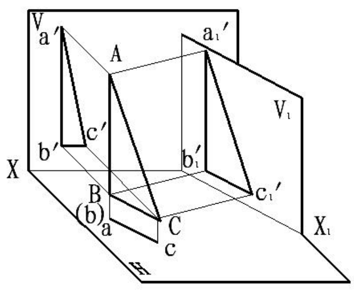


图 2-42　换面法

在换面法中，新投影面的设置必须满足以下两个条件：

（1）新投影面必须垂直于原投影体系中的某一投影面。

（2）新投影面必须使几何元素（直线或平面）处于便于解题的位置。

2.6.2 换面法的基本作图方法

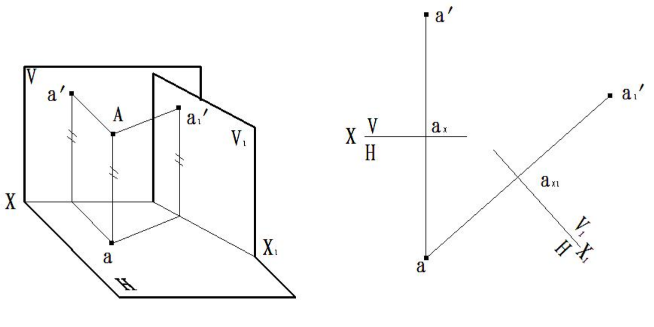
2.6.2.1 点的换面

1. 点的一次换面

如图 2-43（a）所示，A 点在原投影体系 V/H 中的投影为 a、a′。现设置一个新投影面 V_1 替换 V 面，建立新的投影体系 V_1/H，则 A 点在 V_1/H 体系中的投影为 a、a_1'。使 V_1 面绕新投影轴 O_1X_1 旋转与 H 面重合，就得到 A 点在 V_1/H 体系中的两面投影图，如图 2-43（b）所示。从图中可以看出，新投影 a_1'与不变投影面 H 面上的投影 a 的连线垂直于新投影轴，a_1'到 X_1 轴的距离等于 a′到 X 轴的距离。由此可得换面法中投影变换规律如下：

（1）新投影与不变投影之间的连线垂直于投影轴。

（2）新投影到新轴的距离等于被替换投影到旧轴的距离。



（a）　　　　　　　　　　　　（b）

图 2-43　点的一次换面（变换 V 面）

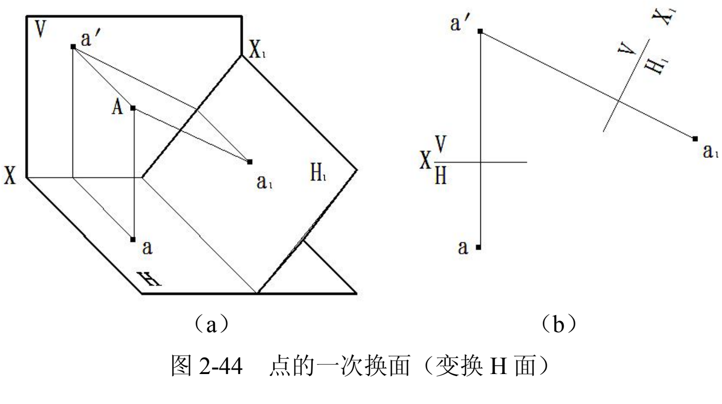
根据上述规律，点的一次换面作图步骤如下：

（1）确定要变换的投影面，如变换 V 面，作新轴 X_1，X_1 轴的位置可根据作图需要而定。

（2）过 a 点作新轴 X_1 的垂线。

（3）在垂线上截取 $a_1'a_{x1}=a'a_x$，即得 A 点在 V_1 面上的新投影 a_1'。

如变换 H 面，作图步骤与上述相似，如图 2-44 所示。



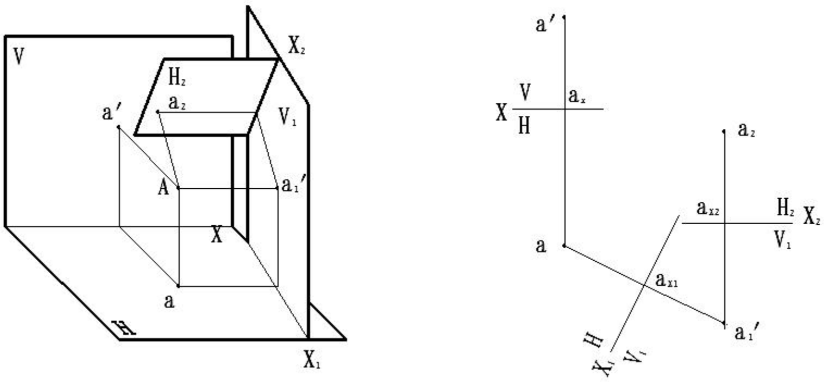
（a）　　　　　　　　　　　　（b）

图 2-44　点的一次换面（变换 H 面）

2. 点的二次换面

在解题中，有时一次换面还不能解决问题，而需要连续两次换面（见图 2-45）。二次换面是在一次换面的基础上进行换面，其原理和作图方法与一次换面相同。但要注意二次换面中，

先换哪一个面应视解题需要而定，然后按顺序进行换面，如 $V/H \to V_1H \to V_1H_2$ 或 $V/H \to V/H_1 \to V_2/H_1$。



（a）　　　　　　（b）

图 2-45　点的二次换面

2.6.2.2　直线的换面

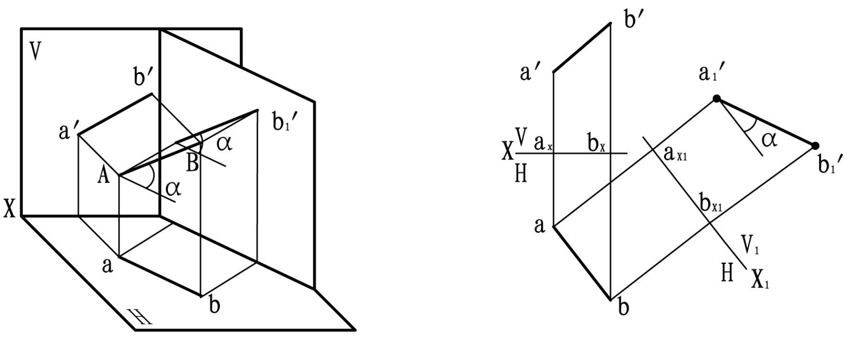
1. 将一般位置直线变换成投影面平行线

如图 2-46 所示，AB 为一般位置直线。现设置 V_1 面平行于 AB 且垂直于 H 面，建立起新的投影面体系 V_1/H，则 AB 变换成 V_1 面的平行线。AB 在 V_1 面的投影 $a_1'b_1'$ 将反映 AB 的实长，$a_1'b_1'$ 与投影轴 X_1 的夹角反映直线 AB 对 H 面的倾角α。作图步骤如下：

（1）作新投影轴 X_1// ab。

（2）分别由 a、b 两点作 X_1 轴的垂直线，与 X_1 轴交于 a_{x1}、b_{x1}，然后在垂线上量取 $a_1'a_{x1}=a'a_x$、$b_1'b_{x1}=b'b_x$，得到新投影 a_1'、b_1'。

（3）$a_1'b_1'$ 反映 AB 的实长，与 X_1 轴的夹角反映 AB 对 H 面的倾角α。



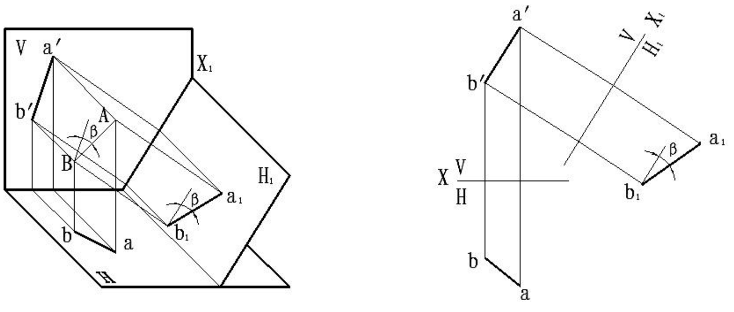
（a）　　　　　　（b）

图 2-46　将一般位置直线变换成投影面平行线（变换 V 面）

如果求 AB 对 V 面的倾角β，则要设置新投影面 H_1 平行于 AB，作图时取 X_1 轴平行于 $a'b'$，如图 2-47 所示。

2. 将投影面平行线变换成投影面垂直线

如图 2-48 所示，AB 为一水平线，现设置 $V_1 \perp AB$，建立新体系 V_1/H，则 AB 为 V_1 面的垂直线。AB 在 V_1 面上的投影积聚成一点。作图步骤如下：



（a） （b）

图 2-47 将一般位置直线变换成投影面平行线（变换 H 面）

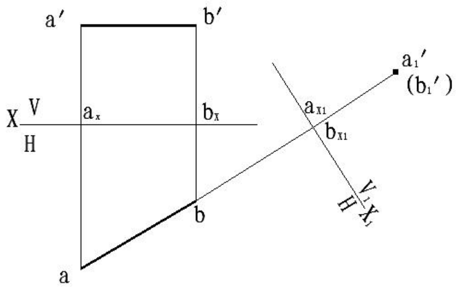


图 2-48 将投影面平行线变换成投影面垂直线

（1）作新投影轴 $X_1 \perp AB$。

（2）过 a 或 b 点作 X_1 轴的垂直线。

（3）作出 AB 在 V_1 面上的投影 a_1'（b_1'）。

3．将一般位置直线变换成投影面垂直线

将一般位置直线变换成投影面垂直线，必须经过二次换面：第一次将一般位置直线变换成投影面平行线；第二次再将投影面平行线变换成投影面垂直线。作图步骤如下（见图 2-49）：

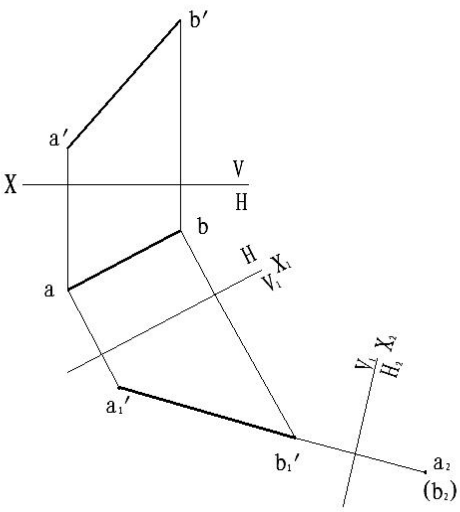


图 2-49 将一般位置直线变换成投影面垂直线

（1）作新投影轴 X_1∥ab，求得 AB 在 V_1/H 体系中的新投影 $a_1'b_1'$。

（2）再作一新投影轴 X_2⊥$a_1'b_1'$，求得 AB 在 V_1/H_2 体系中的新投影 a_2（b_2）。

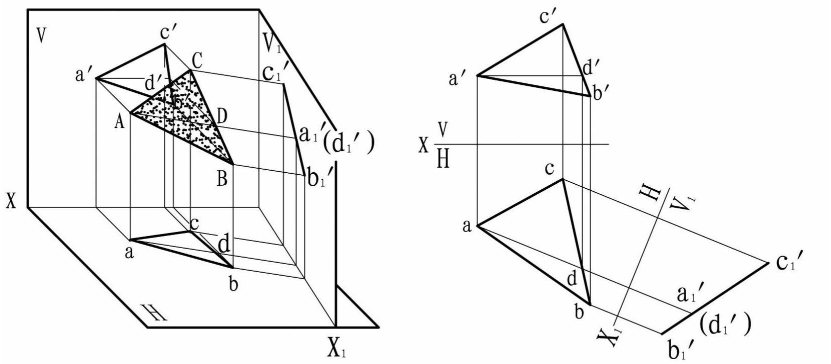
2.6.2.3　平面的换面

1. 将一般位置平面变换成投影面垂直面

将一般位置平面变换成投影面垂直面，即使该一般位置平面垂直于新投影面。在一般位置平面上只要作一条直线垂直于新投影面，则该平面即垂直于新投影面。为了简化作图，可在一般位置平面上任取一条投影面平行线，作其垂直面即为新投影面，则该平面即为新投影面的垂直面（见图 2-50）。作图步骤如下：

（1）在 V/H 体系中，作△ABC 上水平线 AD 的两面投影 ad、a′d′。

（2）作 X_1⊥ad，求得△ABC 的积聚投影 $a_1'b_1'c_1'$。



（a）　　　　　　　　　（b）

图 2-50　将一般位置平面变换成投影面垂直面

2. 将投影面垂直面变换成投影面平行面

如图 2-51 所示，△ABC 为铅垂面，将其变换成投影面平行面，只需一次换面，即变换 V 面，使 V 面平行于△ABC。作图步骤如下：

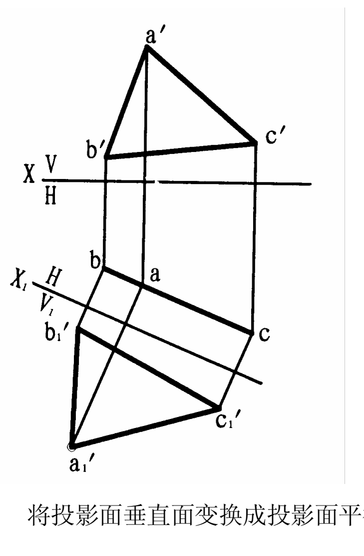


图 2-51　将投影面垂直面变换成投影面平行面

（1）作新投影轴 X_1 平行于△ABC 的积聚投影 abc。

（2）按点的投影变换规律作图，求出 a_1'、b_1'、c_1'，则△$a_1'b_1'c_1'$反映△ABC 实形。

3. 将一般位置平面变换成投影面平行面

将一般位置平面变换成投影面平行面，必须经过两次换面。第一次将一般位置平面变成投影面垂直面；第二次将投影面垂直面变换成投影面平行面。如图 2-52 所示，先将 ABC 变换成 H_1 面的垂直面，再变换成 V_2 面的平行面。作图步骤如下：

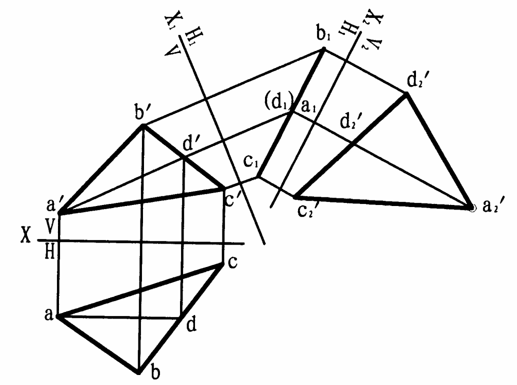


图 2-52 将一般位置平面变换成投影面平行面

（1）在△ABC 上作正平线 AD，设置新投影面 H_1⊥AD，即作 X_1⊥a′d′，然后作出△ABC 在 H_1 面上的积聚投影 $a_1b_1c_1$。

（2）作新投影面 V_2 平行于△ABC，即作 X_2∥$a_1b_1c_1$，然后作出△ABC 在 V_2 面上的新投影△$a_2'b_2'c_2'$，它即反映△ABC 实形。