

# 第 1 章 轴向拉伸与压缩

## 1.1 轴向拉伸与压缩的概念

在工程实际中，经常有杆件承受轴向拉伸或压缩，例如图 1.1 所示桁架中的拉杆和压杆；图 1.2 所示为用于连接的螺栓；图 1.3 所示为气缸工作时的活塞杆；图 1.4 所示为组成起重机塔架的杆件。虽然杆件的外形各有差异，加载形式也不同，但这类杆件的受力特点是：外力或外力合力的作用线与杆轴线重合；其变形特点是：杆件沿着杆轴向方向伸长或缩短。这种变形形式称为轴向拉伸或压缩，这类构件称为拉杆或压杆。本章只研究直杆的拉伸与压缩。可将这类杆件的形状和受力情况进行简化，得到如图 1.5 所示的受力与变形的示意图，图中的实线为受力前的形状，虚线为变形后的形状。

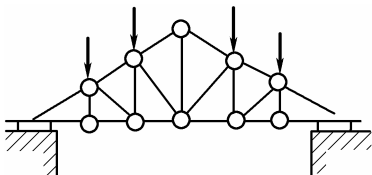


图 1.1

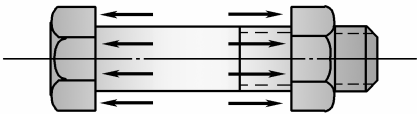


图 1.2

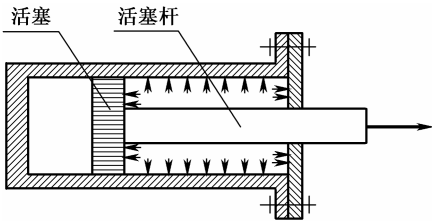


图 1.3

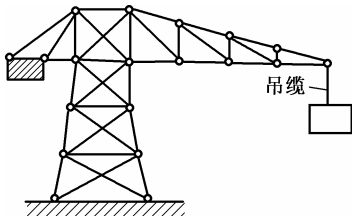


图 1.4

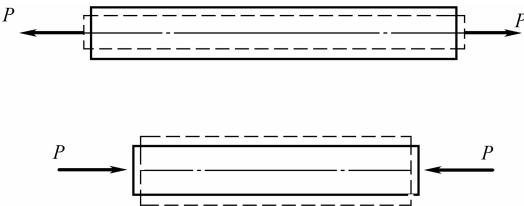


图 1.5



## 1.2 拉（压）杆的内力计算

### 一、轴力

取一等直杆，在它两端施加一对大小相等、方向相反、作用线与直杆轴线相重合的外力，使其产生轴向拉伸变形，如图 1.6 (a) 所示。为了显示拉杆横截面上的内力，采用绪论中介绍的截面法，取横截面  $m-m$  将拉杆分成两段。分别取左半部分或右半部分为研究对象，杆件的任意部分均应保持平衡，设内力为  $F_N$ ，如图 1.6 (b)、(c) 所示。由于外力  $F$  的作用线与杆轴线相重合，所以  $F_N$  的作用线也与杆轴线相重合，故称  $F_N$  为轴力。由静力平衡方程  $\sum F_x = 0$ ，有： $F_N + (-F) = 0$ ，得  $F_N = F$ 。

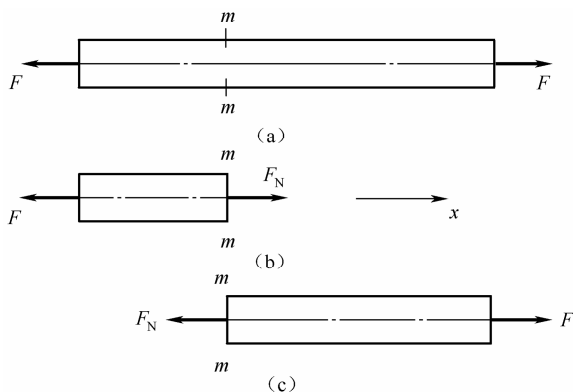


图 1.6

为了使左右两部分求得同一横截面上的轴力具有相同的结果，对轴力的符号做如下规定：使杆件产生纵向伸长的轴力为正（轴力离开截面），称为拉力；使杆件产生纵向缩短的轴力为负（轴力指向截面），称为压力。

### 二、轴力图

如果杆件受到的外力多于两个，则杆件不同部分的横截面上有不同的轴力，为表明横截面轴力沿杆横截面位置的变化情况，以与杆件轴线平行的坐标轴表示各横截面的位置，以垂直于该坐标轴的方向表示相应的轴力值，这样作出的图形称为轴力图。轴力图能够直观地表示出杆件各横截面的轴力的变化情况，习惯上将正值的轴力画在上侧，负的轴力画在下侧。

**例 1.1** 一等直杆，其受力情况如图 1.7 所示，试作其轴力图。

**解：**如图 1.8 所示，在  $AB$  之间任取一横截面 1-1，使用截面法，取左半部分



为研究对象，画受力图，由静力平衡条件  $\sum F_x = 0$  列方程：

$$F_{N1} - 6 = 0, \quad F_{N1} = 6\text{kN}$$

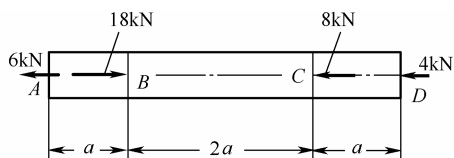


图 1.7

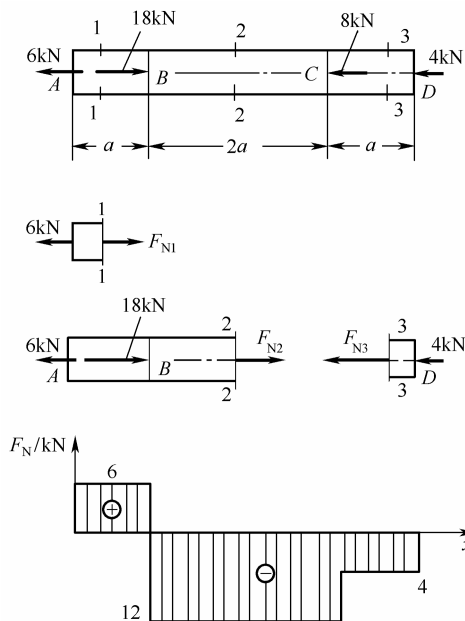


图 1.8

在  $BC$  之间任取一横截面 2-2，使用截面法，取左半部分为研究对象，画受力图，由静力平衡条件列方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N2} + 18 - 6 = 0, \quad F_{N2} = -12\text{kN}$$

在  $CD$  之间任取一横截面 3-3，使用截面法，取右半部分为研究对象，画受力图，由静力平衡条件列方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N3} + 4 = 0, \quad F_{N3} = -4\text{kN}$$

由  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  段内轴力的大小和符号，画出轴力图，如图 1.8 所示。



### 1.3 拉（压）杆横截面及斜截面上的应力

#### 一、横截面上的应力

上节介绍了杆件轴力的求法，但是仅知道杆件横截面上的轴力，并不能判断杆在外力作用下是否会因强度不足而破坏。例如，两根材料相同但粗细不同的直杆，在同样大小的拉力作用下，两杆横截面上的轴力也相同，随着拉力逐渐增大，细杆必定先被拉断。这说明杆件强度不仅与轴力大小有关，还与杆件横截面面积有关，即用横截面上的内力分布集度（应力）来度量杆件的强度。

如图 1.9 所示的等直杆，在其侧面上做两条垂直于轴线的横线  $ab$  和  $cd$ ，在两端施加轴向拉力  $F$ ，观察发现，在杆件变形过程中， $ab$  和  $cd$  保持为直线，且仍然与轴线垂直，只是分别平移到了  $a'b'$  和  $c'd'$ （图 1.9 (a) 中的虚线）。根据此现象，从变形的可能性出发，可以作出假设：原为平面的横截面变形后仍保持为平面，且垂直于轴线，这个假设称为平面假设。该假设意味着杆件变形后任意两个横截面之间所有纵向线段的伸长相等。根据材料的均质连续性假设，由此推断：横截面上的应力均匀分布，且方向垂直于横截面，即横截面上只有正应力  $\sigma$  且均匀分布，如图 1.9 (b) 所示。

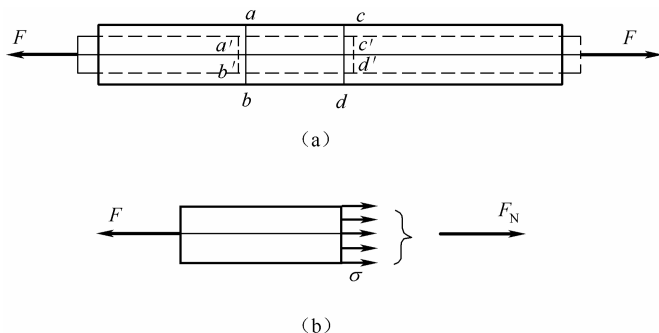


图 1.9

设杆的横截面面积为  $A$ ，微面积  $dA$  上的内力分布集度为  $\sigma$ ，由静力关系得：

$$F_N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

拉杆横截面上正应力  $\sigma$  的计算公式

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (1.1)$$

式中， $\sigma$  为横截面上的正应力， $A$  为横截面积， $F_N$  为横截面上的轴力。公式 (1.1) 也同样适用于轴向压缩的情况。当  $F_N$  为拉力时， $\sigma$  为拉应力；当  $F_N$  为压力时， $\sigma$  为压应力，根据内力正负号的规定，拉应力为正，压应力为负。



需要说明, 正应力均匀分布的结论只在杆上离外力作用点较远的部分才成立, 在载荷作用点附近的截面上有时是不成立的。这是因为在实际构件中, 载荷以不同的加载方式作用于构件, 这对截面上的应力分布是有影响的。实验研究表明, 加载方式的不同, 只对作用力附近截面上的应力分布有影响, 这个结论称为圣维南原理。根据这一原理, 在拉(压)杆中, 离外力作用点稍远的横截面上, 应力分布为均匀分布。在拉(压)杆的应力计算中一般直接用公式 (1.1)。

当杆件受多个外力作用时, 可通过上节作轴力图的方法求得最大轴力  $F_{N\max}$ , 如果是等截面直杆, 利用公式 (1.1) 就可求出杆内最大正应力  $\sigma_{\max} = F_{N\max} / A$ ; 如果是变截面杆件, 则需要求出每段杆件的轴力, 然后利用公式 (1.1) 分别求出每段杆件上的正应力, 进行比较确定最大正应力  $\sigma_{\max}$ 。

**例 1.2** 变截面杆受力如图 1.10 (a) 所示,  $A_1 = 400\text{mm}^2$ ,  $A_2 = 300\text{mm}^2$ ,  $A_3 = 200\text{mm}^2$ 。材料的  $E = 200\text{GPa}$ 。试求: (1) 绘出杆的轴力图; (2) 计算杆内各段横截面上的正应力。

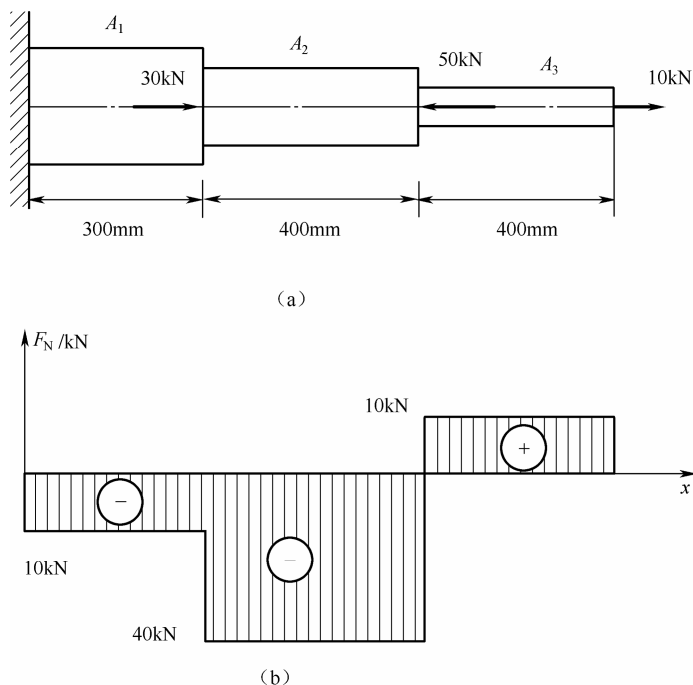


图 1.10

**解:** (1) 杆的轴力图如图 1.10 (b) 所示, 各段的轴力

$$F_{N1} = -10\text{kN}, \quad F_{N2} = -40\text{kN}, \quad F_{N3} = 10\text{kN}$$

(2) 各段横截面上的正应力为



$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{-10 \times 10^3}{400 \times 10^{-6}} = -2.5 \times 10^7 \text{ Pa} = -25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{-40 \times 10^3}{300 \times 10^{-6}} = -13.3 \times 10^7 \text{ Pa} = -133 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{F_{N3}}{A_3} = \frac{10 \times 10^3}{200 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^7 \text{ Pa} = 50 \text{ MPa}$$

其中负号表示为压应力。

## 二、斜截面上的应力

实验表明,拉(压)杆的破坏并不总在横截面上发生,有些拉(压)杆的破坏发生在斜截面。为了全面研究杆件的强度,还需要讨论斜截面上的应力情况。

设等直杆受到轴向拉力  $F$  的作用,横截面面积为  $A$ ,用任意斜截面  $m-m$  将杆件假想的切开,设斜截面的面积为  $A_\alpha$ ,斜截面的外法线与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ ,如图 1.11 (a) 所示。 $A$  与  $A_\alpha$  之间有:

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$$

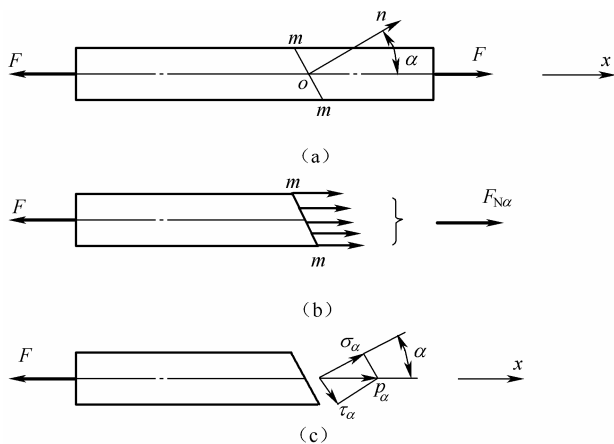


图 1.11

设  $F_{N\alpha}$  为  $m-m$  截面上的内力,由左段平衡求得  $F_{N\alpha} = P$ ,如图 1.11 (b) 所示。依照横截面上应力的推导方法,可知斜截面上各点处应力均匀分布。用  $p_\alpha$  表示其上的应力,则

$$p_\alpha = \frac{F_{N\alpha}}{A_\alpha} = \frac{F \cos \alpha}{A} = \sigma \cos \alpha$$

式中的  $\sigma$  为横截面上的正应力。将应力  $p_\alpha$  分解成沿斜截面法线方向的正应力  $\sigma_\alpha$  和沿斜截面切线方向的切应力  $\tau_\alpha$ ,如图 1.11 (c) 所示。规定切应力对研究对象内任



意点绕顺时针转动时为正，反之为负。规定 $\alpha$ 由 $x$ 轴转到斜截面外法线方向逆时针为正，反之为负。由图 1.11 (c) 可知

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \quad (1.2)$$

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \quad (1.3)$$

讨论式 (1.2) 和 (1.3):

(1) 当 $\alpha = 0$ 时，横截面 $\sigma_{\alpha \max} = \sigma$ ， $\tau_{\alpha} = 0$ 。

(2) 当 $\alpha = 45^\circ$ 时，斜截面 $\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma}{2}$ ， $\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma}{2}$ 。

(3) 当 $\alpha = 90^\circ$ 时，纵向截面 $\sigma_{\alpha} = 0$ ， $\tau_{\alpha} = 0$ 。

结论：对于轴向拉（压）杆，最大正应力发生在横截面上；最大切应力发生在沿逆时针转 $45^\circ$ 角的斜截面上。同样大小的剪应力也发生在 $\alpha = -45^\circ$ 的斜面上。

## 1.4 拉（压）杆的变形

轴向拉（压）杆的变形特点是：杆件沿着杆轴向方向伸长或缩短。即杆件在轴向拉伸或压缩时，其轴线方向的尺寸和横向尺寸将发生改变。杆件沿轴线方向的变形称为纵向变形，杆件沿垂直于轴线方向的变形称为横向变形。

设等直杆的原长为 $l$ ，横截面面积为 $A$ ，如图 1.12 所示。在轴向拉力 $F$ 的作用下，杆件的长度由 $l$ 变为 $l_1$ ，其纵向伸长量为

$$\Delta l = l_1 - l$$

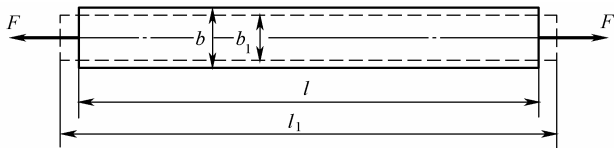


图 1.12

$\Delta l$  称为绝对伸长，它反映杆件总变形量，无法说明杆的变形程度。由于杆内各段伸长是均匀的，所以轴向线应变为杆件的伸长 $\Delta l$ 除以原长 $l$ ，即每单位长度的伸长或缩短，用 $\varepsilon$ 表示。

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.4)$$

拉杆在纵向变形的同时还有横向变形，设拉杆变形前的横向尺寸为 $b$ ，变形后的尺寸为 $b_1$ （图 1.12），则横向变形为

$$\Delta b = b_1 - b$$

故横向线应变



$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} \quad (1.5)$$

实验结果表明, 当应力不超过材料的比例极限时, 横向正应变与纵向正应变之比的绝对值为一常数, 该常数称为泊松比, 用  $\mu$  来表示, 它是一个无量纲的量, 可表示为

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (1.6)$$

考虑到纵向线应变和横向线应变正负号总是相反, 有:

$$\varepsilon' = -\varepsilon\mu \quad (1.7)$$

工程中大多数材料, 其应力与应变关系的初始阶段都是线弹性的。即当材料应力不超过比例极限时, 应力与应变成正比, 这就是胡克定律。表示为

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.8)$$

式中  $E$  为弹性模量, 单位与  $\sigma$  相同。泊松比  $\mu$  和弹性模量  $E$  均为材料的弹性常数, 随材料的不同而不同, 由试验测定。对于绝大多数各向同性材料,  $\mu$  介于  $0 \sim 0.5$  之间。几种常用材料的  $E$  和  $\mu$  值, 列于表 1.1 中。

表 1.1 材料的弹性模量和泊松比

材料名称	牌号	$E$ (GPa)	$\mu$
低碳钢	Q235	200~210	0.24~0.28
中碳钢	35, 45 号	205~209	0.26~0.30
低合金钢	16Mn	200	0.25~0.30
合金热强钢	40CrNiMoA	210	0.28~0.32
合金预应力钢筋	45MnSiV	220	0.23~0.25
灰口铸铁		60~162	0.23~0.27
球墨铸铁		150~180	0.24~0.27
铝合金	LY12	72	0.33
铜合金		100~110	0.31~0.36

由计算公式 (1.1) 和 (1.4), 代入 (1.8) 得

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} = \frac{Fl}{EA} \quad (1.9)$$

公式 (1.9) 是胡克定律的另一种表达式。由该式可以看出, 若杆长及外力不变,  $EA$  值越大, 则变形  $\Delta l$  越小, 因此,  $EA$  反映杆件抵抗拉伸 (或压缩) 变形的能力, 称为杆件的抗拉 (抗压) 刚度。若  $F_N$  为压力, 是负值, 伸长量  $\Delta l$  也是负值, 说明杆件缩短。

**例 1.3** 变截面杆如图 1.13 所示。已知:  $A_1 = 8\text{cm}^2$ ,  $A_2 = 4\text{cm}^2$ ,  $E = 200\text{GPa}$ 。



求杆件的总伸长  $\Delta l$ 。

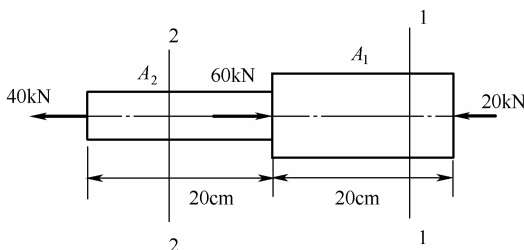


图 1.13

解：如图作截面 1-1, 2-2, 由截面法可求得

$$F_{N1} = -20\text{kN}, F_{N2} = 40\text{kN}$$

所以杆件的总伸长

$$\Delta l = \frac{F_{N1}L_1}{EA_1} + \frac{F_{N2}L_2}{EA_2} = -\frac{20 \times 10^3 \times 200}{200 \times 10^3 \times 800} + \frac{40 \times 10^3 \times 200}{200 \times 10^3 \times 400} = 0.075\text{mm}$$

**例 1.4** 在图 1.14 所示的简单杆系中,  $AB$  和  $AC$  分别是直径为 20mm 和 24mm 的圆截面杆,  $E=200\text{GPa}$ ,  $P=5\text{kN}$ 。试求  $A$  点的垂直位移。

解：(1) 以铰  $A$  为研究对象, 如图 1.15 所示, 设杆  $AC$  和  $AB$  的轴力分别为  $F_{NAC}$  和  $F_{NAB}$ , 由

$$\sum F_x = 0, F_{NAC} \cos 30^\circ - F_{NAB} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{NAC} \sin 30^\circ + F_{NAB} \sin 45^\circ - P = 0$$

$$F_{NAB} = 4.48\text{kN}, F_{NAC} = 3.66\text{kN}$$

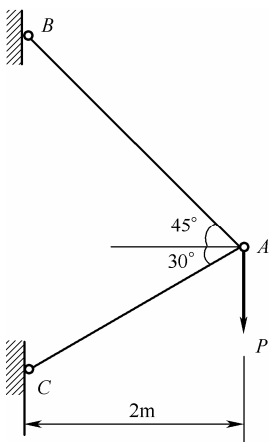


图 1.14

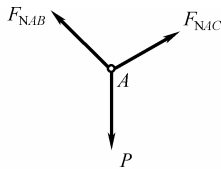


图 1.15

(2) 两杆的变形为



$$\Delta l_{AB} = \frac{F_{NAB} l_{AB}}{EA_{AB}} = \frac{4.48 \times 10^3 \times \frac{2000}{\cos 45^\circ}}{200 \times 10^3 \times \frac{\pi \times 20^2}{4}} = 0.201 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{AC} = \frac{F_{NAC} l_{AC}}{EA_{AC}} = \frac{3.66 \times 10^3 \times \frac{2000}{\cos 30^\circ}}{200 \times 10^3 \times \frac{\pi \times 24^2}{4}} = 0.0934 \text{ mm (缩短)}$$

(3) 已知  $\Delta l_{AB}$  为拉伸变形,  $\Delta l_{AC}$  为压缩变形。设想将托架在节点  $A$  拆开,  $AB$  杆伸长变形后变为  $BA_2$ ,  $AC$  杆压缩变形后变为  $CA_1$ 。分别以  $C$  点和  $B$  点为圆心,  $\overline{CA_1}$  和  $\overline{BA_2}$  为半径, 作圆弧相交于  $A'$ 。  $A'$  点即为托架变形后  $A$  点的位置。因为是小变形,  $A_1A'$  和  $A_2A'$  是两段极其微小的短弧, 因而可用分别垂直于  $AC$  和  $AB$  的直线线段来代替, 这两段直线的交点即为  $A'$ 。  $AA'$  即为  $A$  点的位移。这种作图法称为“切线代圆弧”法, 如图 1.16 所示。  $A$  点受力后将位移至  $A'$ , 所以  $A$  点的垂直位移为  $AA''$ 。

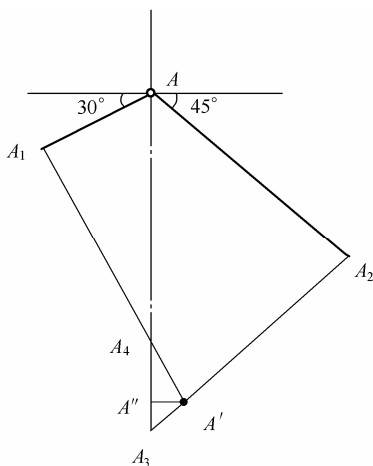


图 1.16

在图中,  $AA_1 = \Delta l_{AC}$ ,  $AA_2 = \Delta l_{AB}$ ,  $\Delta A'A_3A_4$  中

$$A_4A_3 = AA_3 - AA_4 = AA_2 / \cos 45^\circ - AA_1 / \sin 30^\circ = 0.097 \text{ mm}$$

$$A_4A_3 = A'A'' \cot 30^\circ + A'A'' \cot 45^\circ$$

可得:  $A'A'' = 0.035 \text{ mm}$ 。

可求  $A$  点的垂直位移

$$y_A = AA'' = AA_3 - A_3A'' = \Delta l_{AB} / \sin 45^\circ - A'A'' \cot 45^\circ = 0.249 \text{ mm}$$

从上述计算可得, 由静力平衡条件, 计算杆件的轴力, 再由胡克定律计算杆件的变形, 最后由变形的几何协调条件求得节点的位移。



## 1.5 拉（压）超静定问题

在前面讨论的问题中，杆件的约束反力、内力可用静力平衡方程求解，这类问题称为静定问题，这类结构称为静定结构。图 1.17 (a) 所示的结构即为一静定结构。

但在工程中，有时为了提高强度和刚度，或由于结构上的需要，往往给杆件或结构增加一些约束，如在 1.17 (a) 所示的结构中增加一根杆，变为图 1.17 (b) 所示的结构，此时结构的约束力和内力的个数已超过静力平衡方程的个数，故不能由静力平衡方程求出全部这些约束力和内力，这样的杆件和结构称为超静定杆件和结构。全部未知力的个数与独立平衡方程个数的差值，称为超静定的次数。图 1.17 (b) 所示结构为一次超静定。

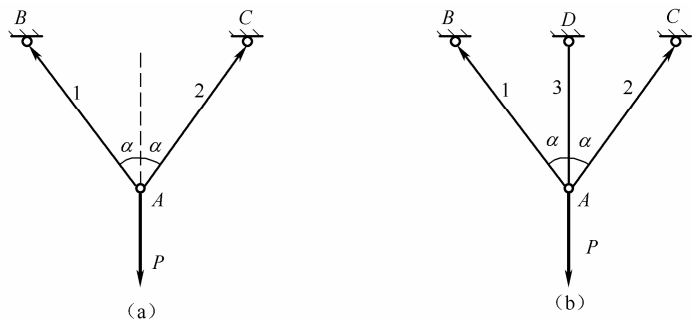


图 1.17

为了解超静定问题的未知力，除应利用平衡方程外，还必须研究变形，并借助变形与内力之间的关系，建立足够数量的补充方程。一般可按以下步骤进行计算：(1) 静力学平衡条件列出应有的平衡方程；(2) 变形协调条件列出变形几何方程；(3) 力与变形间的物理关系建立补充方程。

以图 1.18 (a) 所示的超静定杆系为例，介绍此类问题的求解。设杆 1 与杆 2 的抗拉刚度相同，均为  $E_1 A_1$ ，杆 3 的抗拉刚度为  $E_3 A_3$ ，杆 1 和杆 3 的长度分别为  $l_1$  和  $l_3$ ，试求在力  $P$  作用下各杆的内力。

在载荷作用下，节点  $A$  铅垂地移到  $A_1$ ， $AA_1$  即为杆 3 的伸长  $\Delta l_3$ ，节点  $A$  的受力如图 1.18 (b) 所示，其平衡方程为：

$$\Sigma F_x = 0, F_{N2} \sin \alpha - F_{N1} \sin \alpha = 0 \quad (\text{a})$$

$$\Sigma F_y = 0, F_{N3} + F_{N1} \cos \alpha + F_{N2} \cos \alpha - P = 0 \quad (\text{b})$$

三杆原交于一点，变形后杆 1 应在虚线  $A_1 B$  的位置。以  $B$  为圆心，杆 1 的原长为半径作圆弧，圆弧以外的线段长为杆 1 的伸长  $\Delta l_1$ ，由于变形量很小，以上节介绍的垂线代替弧线，即有



$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha \quad (c)$$

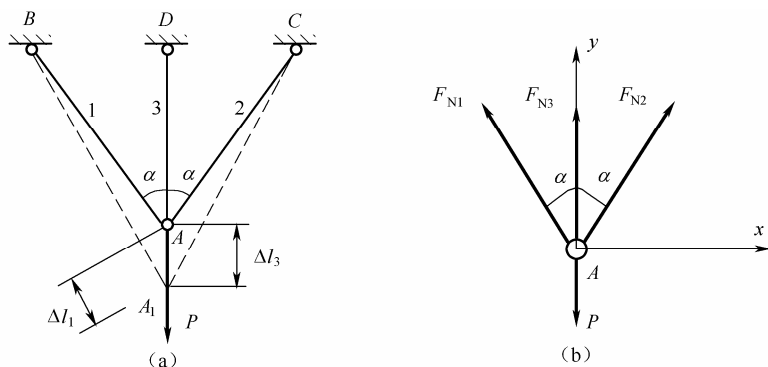


图 1.18

这就是 1、2、3 杆件变形必须满足的关系，称为变形协调条件或变形协调方程。设三杆均处于弹性范围，则由胡克定律可知：

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1}$$

$$\Delta l_3 = \frac{F_{N3} l_3}{E_3 A_3} = \frac{F_{N3} l_1 \cos \alpha}{E_3 A_3}$$

将上述关系代入 (c) 式，得到用轴力表示的变形协调方程，即补充方程为：

$$\frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1} = \frac{F_{N3} l_1 \cos \alpha}{E_3 A_3} \cos \alpha \quad (d)$$

联立方程 (a)、(b)、(d)，解得

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{F \cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1}}, \quad F_{N3} = \frac{F}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^3 \alpha}$$

所得结果均为正，说明各杆轴力均为拉力的假设正确。

**例 1.5** 在图 1.19 结构中，设 AC 梁为刚杆，杆件 1、2、3 的横截面面积相等，材料不同。试求三杆的轴力。

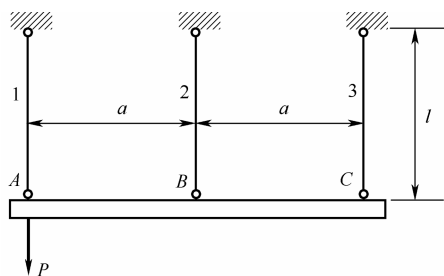


图 1.19



解：以刚杆  $AC$  为研究对象，其受力和变形情况如图 1.20 所示。

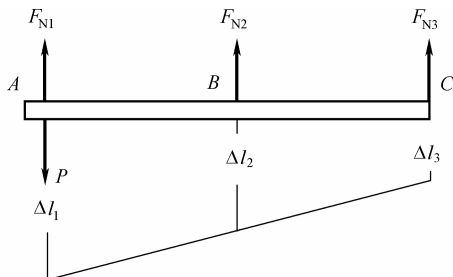


图 1.20

各力组成平面平行力系，由平衡方程：

$$\sum F_y = 0, F_{N1} + F_{N2} + F_{N3} - P = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum M_A = 0, F_{N2}a + 2F_{N3}a = 0 \quad (\text{b})$$

两个方程求解三个未知轴力，需要补充一个方程， $AC$  为刚体，三根杆件的变形必须保证一定的协调关系，三杆变形之间有以下关系：

$$\Delta l_1 + \Delta l_3 = 2\Delta l_2 \quad (\text{c})$$

设三杆的弹性模量分别为  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$ ，则由胡克定律：

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1}l}{E_1A}, \Delta l_2 = \frac{F_{N2}l}{E_2A}, \Delta l_3 = \frac{F_{N3}l}{E_3A} \quad (\text{d})$$

联立方程 (a)、(b)、(c)、(d) 得：

$$F_{N1} = \frac{4E_1E_3 - E_1E_2}{4E_1E_3 - E_1E_2 - E_2E_3}P, F_{N2} = \frac{-2E_2E_3}{4E_1E_3 - E_1E_2 - E_2E_3}P$$

$$F_{N3} = \frac{E_2E_3}{4E_1E_3 - E_1E_2 - E_2E_3}P$$

超静定结构（杆）各部分的内力不仅与载荷有关，而且与各部分的刚度之比有关，其本身的刚度越大，内力也越大。这也是超静定问题与静定问题的区别之一。

在工程中，杆件构件制成后，其尺寸的微小误差是常见的，在静定结构中，装配时会引起结构几何形状的微小改变，不会引起内力。但在超静定结构中，由于加工存在微小误差，装配时，将在结构内引起应力，这种应力称为装配应力。

**例 1.6** 在图 1.21 所示的结构中，1、2 两杆的抗拉刚度同为  $E_1A_1$ ，3 杆的抗拉刚度为  $E_3A_3$ 。3 杆的长度为  $l+\delta$ ，其中  $\delta$  为加工误差。试求将 3 杆装入  $AC$  位置后，1、2、3 杆的内力。

**解：**3 杆装入后，三杆的铰接点为  $A_1$ ，此时 3 杆将缩短，而 1 杆和 2 杆将伸长，节点  $A_1$  受力分析如图 1.22 (a) 所示。

此力系为平面汇交力系，由平衡方程得：



$$\sum F_x = 0, F_{N2} \sin \alpha - F_{N1} \sin \alpha = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum F_y = 0, F_{N1} \cos \alpha + F_{N2} \cos \alpha - F_{N3} = 0 \quad (\text{b})$$

由图 1.22 (b) 得变形协调条件:

$$\Delta l_1 = (\delta - \Delta l_3) \cos \alpha \quad (\text{c})$$

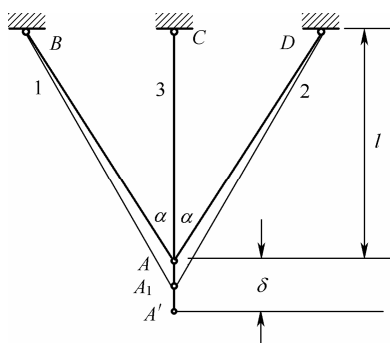
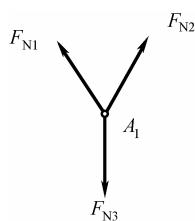
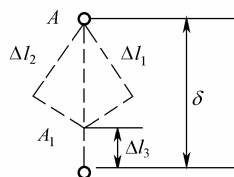


图 1.21



(a)



(b)

图 1.22

由物理关系

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1}, \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{E_1 A_1}, \Delta l_3 = \frac{F_{N3} l_3}{E_3 A_3}$$

$$l_1 = l_2 = \frac{l_3}{\cos \alpha}$$

得补充方程

$$\frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1} = \left( \delta - \frac{F_{N3} l_3}{E_3 A_3} \right) \cos \alpha \quad (\text{d})$$

联立求解三根杆的内力

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{\delta E_1 A_1 E_3 A_3 \cos^2 \alpha}{l(2E_1 A_1 \cos^2 \alpha + E_3 A_3)}$$



$$F_{N3} = \frac{2\delta E_1 A_1 E_3 A_3 \cos^2 \alpha}{l(2E_1 A_1 \cos^2 \alpha + E_3 A_3)}$$

装配应力的存在,有时是不利的,应加以避免;但有时也可利用它达到一定目的。例如土木工程中的预应力钢筋混凝土构件和机械制造中的紧配合等,就是利用装配应力以提高构件承载能力的例子。

温度变化会引起物体的膨胀或收缩,对于超静定结构由于胀缩变形受到约束,则会产生内应力。因温度变化而引起的内应力,称为温度应力。例如图 1.23 (a) 所示两端固定的杆件,由于温度变形被固定端所阻止,杆内即引起温度应力。

为了分析该杆的温度应力,假想地把  $B$  端的约束解除,并以支反力  $F_B$  代替其作用,如图 1.23 (b) 所示,其静力学平衡方程:

$$\sum F_x = 0, \quad F_{RA} - F_{RB} = 0 \quad (a)$$

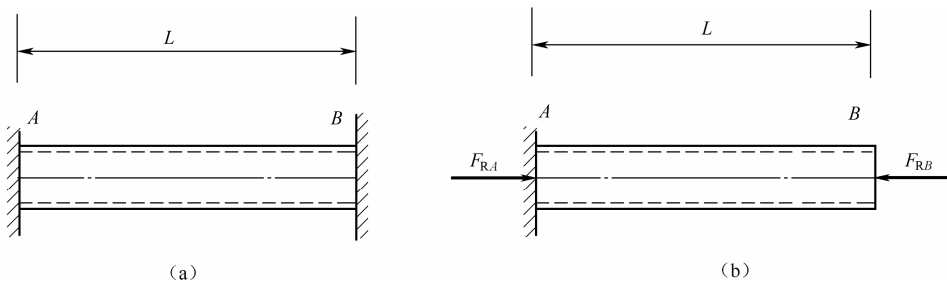


图 1.23

一个平衡方程求解两个未知力,因此为一次超静定问题。

杆件因为温度升高而产生的变形(伸长)为:

$$\Delta L_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L \quad (b)$$

式中,  $\alpha$  为材料的线膨胀系数。杆件在两端约束力作用下产生的变形为:

$$\Delta L_N = -\frac{F_B L}{EA} \quad (c)$$

杆件两端约束,杆件的总长度不变,故有

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot L - \frac{F_B L}{EA} = 0 \quad (d)$$

$$F_B = \alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot A$$

得杆内横截面上的正应力,即温度应力为:

$$\sigma = \frac{F_B}{A} = \alpha \cdot \Delta T \cdot E$$

在超静定结构中,温度应力不容忽视。铁路轨道接头处、砼路面中,通常均需留适当的空隙;桥桁架一端采用活动铰链支座等,都是考虑温度变化引起伸缩做出的措施;否则,将会导致破坏或妨碍结构的正常工作。



## 1.6 材料在拉伸压缩时的力学性能

所谓力学性能是指材料在外力作用下表现出的强度和变形方面的特性。例如弹性模量  $E$ 、泊松比  $\mu$  等。它是通过各种试验测定得出的, 研究材料力学性能的目的是确定在变形和破坏情况下的一些重要性能指标, 作为选用材料、计算材料强度、刚度的依据。因此材料力学试验是材料力学课程重要的组成部分。

为便于比较不同材料的试验结果, 对试样的形状、加工精度、加载速度、试验环境等国家标准有统一规定。本节主要介绍材料在缓慢加载、室温下拉伸(压缩)时的力学性能。对于金属材料, 拉伸通常采用圆柱形试件, 其形状如图 1.24 所示, 长度  $l$  为标距。标距一般有两种, 即  $l=5d$  和  $l=10d$ , 前者称为短试件, 后者称为长试件, 式中的  $d$  为试件的直径。金属的压缩试样一般为很短的圆柱, 以避免被压弯, 其形状如图 1.25 所示,  $h=1.5d\sim 3d$ 。混凝土、石料等为立方形的试块, 如图 1.26 所示。

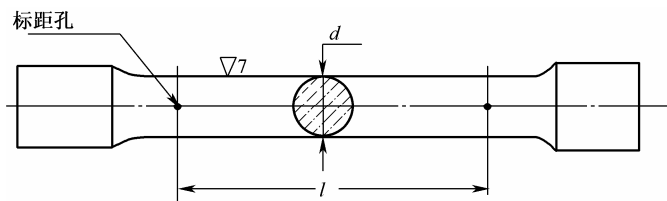


图 1.24

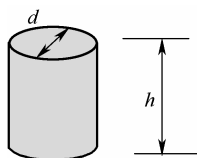


图 1.25

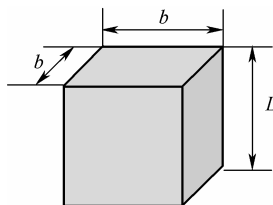


图 1.26

工程中所用材料品种很多, 本节以低碳钢和铸铁为代表, 介绍材料在拉伸和压缩时的力学性能。

### 一、低碳钢拉伸时的力学性能

低碳钢是指含碳量低于 0.3% 的碳素钢。其在拉伸试验中表现出来的力学性能比较典型。将低碳钢试件两端装入试验机上, 缓慢加载, 使其受到拉力产生变形, 利用试验机的自动绘图装置, 可以画出试件在试验过程中标距为  $l$  段的伸长量  $\Delta l$  和拉力  $F$  之间的关系曲线。该曲线的横坐标为  $\Delta l$ , 纵坐标为  $F$ , 称之为试件的拉



伸图，如图 1.27 所示。

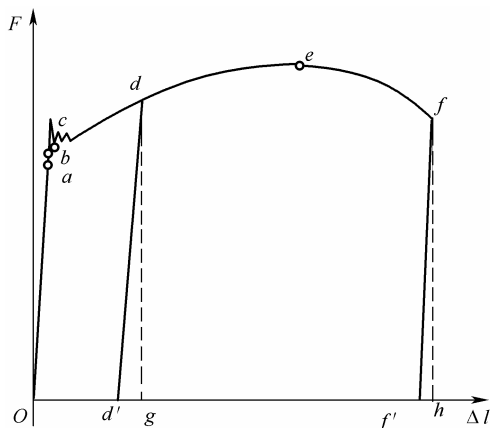


图 1.27

拉伸图与试样的几何尺寸有关，把拉力  $F$  除以试件的原横截面面积  $A$ ，得到横截面上的正应力  $\sigma$ ，作为纵坐标；将伸长量  $\Delta l$  除以标距的原始长度  $l$ ，得到纵向应变  $\varepsilon$ ，作为横坐标。获得  $\sigma-\varepsilon$  曲线，如图 1.28 所示，称为应力—应变图。此曲线与试件的尺寸无关。

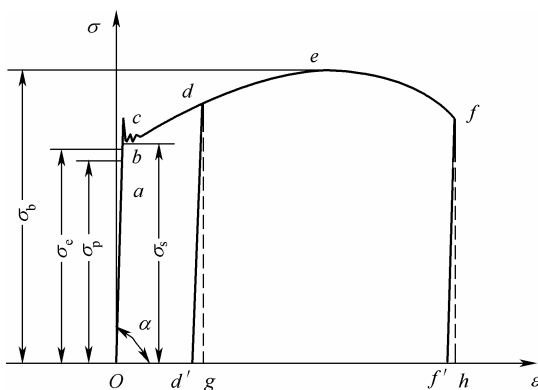


图 1.28

由低碳钢的  $\sigma-\varepsilon$  曲线可见，低碳钢拉伸时的力学性能如下：

(1) 弹性阶段  $Ob$ 。初始为一斜直线  $Oa$ ，这表示当应力小于  $a$  点相应的应力时，应力与应变成正比，即

$$\sigma = E\varepsilon$$

即前面介绍过的胡克定律，由公式可知，弹性模量  $E$  为斜线  $Oa$  的斜率。与  $a$  点相应的应力用  $\sigma_p$  表示，它是应力与应变成正比的应力，称为比例极限。当应力  $\sigma$



小于  $b$  点所对应的应力时, 如果卸去外力, 变形全部消失, 这个阶段的变形为弹性变形。因此, 这一阶段称为弹性阶段。相应于  $b$  点的应力用  $\sigma_e$  表示, 它是材料只产生弹性变形的最大应力, 称为弹性极限。弹性阶段内, 在  $\sigma-\varepsilon$  曲线上, 超过  $a$  点后  $ab$  段的图线微弯,  $a$  与  $b$  极为接近, 因此工程中对弹性极限和比例极限并不严格区分。

当应力超过弹性极限后, 若卸去外力, 材料的变形只能部分消失, 另一部分将残留下来, 残留下来的那部分变形称为残余变形或塑性变形。

(2) 屈服阶段  $bc$ 。当应力达到  $b$  点的相应值时, 应力在一微小范围内波动, 但变形却继续增大,  $\sigma-\varepsilon$  曲线上出现一条近似水平的小锯齿形线段, 这种应力几乎保持不变而应变显著增加的现象, 称为屈服或流动,  $bc$  阶段称为屈服阶段。在屈服阶段内的最高应力和最低应力分别称为上屈服极限和下屈服极限。由于上屈服极限一般不如下屈服极限稳定, 故规定下屈服极限为材料的屈服强度, 用  $\sigma_s$  表示。在工程实际中, 某些构件发生的塑性变形将影响结构的正常工作, 所以屈服极限  $\sigma_s$  是衡量材料强度的重要指标。

若试件表面经过磨光, 当应力达到屈服极限时, 可在试件表面看到与轴线成约  $45^\circ$  的一系列条纹, 如图 1.29 所示为低碳钢在屈服时表面出现的滑移线。这可能是材料内部晶格间相对滑移而形成的, 故称为滑移线。轴向拉压时, 在与轴线成  $45^\circ$  的斜截面上, 有最大的切应力。可见, 滑移现象与最大切应力有关。

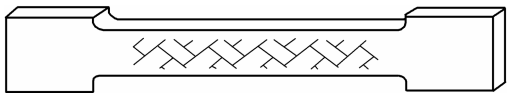


图 1.29

(3) 强化阶段  $ce$ 。经过屈服阶段后, 材料又恢复了抵抗变形的能力, 只有增加载荷才能使杆件继续变形, 这种现象称为材料的强化。从  $c$  点到曲线的最高点  $e$ , 即  $ce$  阶段为强化阶段。 $e$  点对应的应力是材料所能承受的最大应力, 称为强度极限, 用  $\sigma_b$  表示。它是衡量材料强度的另一个重要指标。在这一阶段中, 试件发生明显的横向尺寸的缩小。

(4) 局部变形阶段  $ef$ 。试件伸长到一定程度, 载荷读数反而逐渐减小, 此时某一段处横截面面积迅速减小, 形成颈缩现象, 如图 1.30 所示为低碳钢试件的颈缩。由于局部的截面收缩, 使试件继续变形所需的拉力逐渐减小, 直到  $f$  点试件断裂。

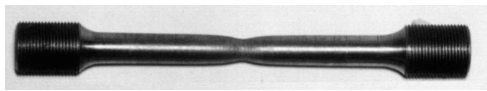


图 1.30

若在强化阶段中的任意一点  $d$  处停止加载, 并逐渐卸掉载荷, 此时应力—应变关系将沿着斜直线  $dd'$  回到  $d'$  点, 线  $dd'$  近似平行于  $Oa$ 。卸载时载荷与伸长量



之间按直线关系的规律称为材料的卸载规律。由此可见,在强化阶段,材料产生大的塑性变形,横坐标中的 $Od'$ 表示残留的塑性应变, $dg'$ 则表示弹性应变。如果卸载后立即重新加载,应力—应变关系大体上沿卸载时的斜直线 $dd'$ 变化,到 $d$ 点后又沿曲线 $def$ 变化,直至断裂。从图 1.28 中看出,在重新加载过程中,直到 $d$ 点以前,材料的变形是弹性变形,过 $d$ 点后才开始有塑性变形。重新加载时其比例极限得到提高,但塑性变形却有所降低。这种现象称为冷作硬化。工程中常利用冷作硬化提高钢筋和钢缆绳等构件在线弹性范围内所能承受的最大载荷。冷作硬化经退火处理后又可消除。

材料产生塑性变形的能力称为材料的塑性性能。塑性性能是工程中评定材料力学性能的重要指标,拉断后标距的残余伸长( $l_1 - l$ )与原始标距 $l$ 之比的百分率,称为延伸率 $\delta$ ,即

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \quad (1.10)$$

$\delta$  越大,材料的塑性变形能力越强,因此延伸率是衡量材料塑性的指标,衡量材料塑性的另一个指标是断面收缩率 $\psi$ ,其定义为断裂后试件颈缩处面积的最大缩减量 $A - A_1$ 与原始横截面面积 $A$ 之比的百分率

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \quad (1.11)$$

对于低碳钢: $\delta = 20\% \sim 30\%$ , $\psi = 60\%$ 。这两个值越大,说明材料塑性越好。工程上通常按延伸率的大小把材料分为两类: $\delta \geq 5\%$ 的材料称为塑性材料,如碳钢、铝合金等; $\delta < 5\%$ 的材料称为脆性材料,如灰铸铁、玻璃、陶瓷等。

## 二、铸铁拉伸时的力学性能

铸铁拉伸的 $\sigma - \varepsilon$ 曲线如图 1.31 所示。 $\sigma - \varepsilon$ 关系从很低的拉力开始就不是直线了,直到拉断时,试件变形仍然很小,且没有屈服、强化和局部变形阶段。工程中,在较低的拉应力下,可以近似地认为变形服从胡克定律,通常用一条割线来代替曲线,如图 1.31 中的虚线所示,并用它确定弹性模量 $E$ 。这样确定的弹性模量称为割线弹性模量。由于铸铁没有屈服现象,因此强度极限 $\sigma_b$ 是衡量强度的唯一指标。

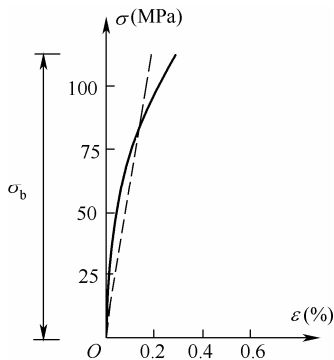


图 1.31

## 三、其他塑性材料拉伸时的力学性能

工程中常用的塑性材料,除低碳钢外,还有中碳钢、高碳钢、合金钢、铝合金、黄铜、青铜等。图 1.32 (a) 中给出了几种塑性材料拉伸时的 $\sigma - \varepsilon$ 曲线,它



们有一个共同特点是拉断前均有较大的塑性变形,然而它们的应力—应变规律却大不相同,除 16Mn 钢和低碳钢一样有明显的弹性阶段、屈服阶段、强化阶段和局部变形阶段外,其他材料并没有明显的屈服阶段。对于没有明显屈服阶段的塑性材料,可以将产生的塑性应变为 0.2% 时的应力作为屈服极限,并称为名义屈服极限,用  $\sigma_{0.2}$  来表示,这是一个人为规定的极限应力,作为衡量材料强度的指标,如图 1.32 (b) 所示。

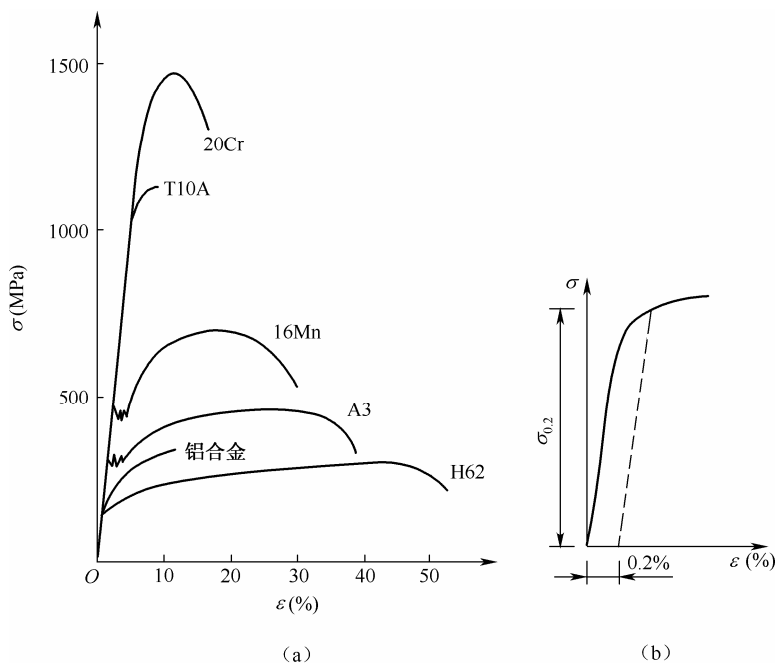


图 1.32

#### 四、材料在压缩时的力学性能

金属材料的压缩之所以作成  $h=1.5d\sim 3d$  的短圆柱,是避免被压弯。低碳钢压缩时的应力—应变曲线如图 1.33 所示。为了便于比较,图中还画出了其拉伸时的应力—应变曲线,用虚线表示。试验表明低碳钢压缩时的弹性模量  $E$ 、屈服极限  $\sigma_s$  等都与拉伸时基本相同。不同的是,进入屈服阶段以后,试件越压越扁,横截面积不断增大,试件抗压能力也继续增强,但并不断裂,如图 1.34 所示。由于无法测出压缩时的强度极限,所以对低碳钢压缩实验的实用性不强,主要力学性能由拉伸实验确定。类似情况在一般的塑性金属材料中也存在,但有的塑性材料,如铬钼硅合金钢,在拉伸和压缩时的屈服极限并不相同,因此对这些材料还要做压缩试验,以测定其压缩屈服极限。

脆性材料压缩时的力学性能与拉伸时有较大区别。例如铸铁,其压缩和拉伸



时的应力—应变曲线分别如图 1.35 中的实线和虚线所示。比较两条曲线可知，铸铁压缩时的强度极限和延伸率都比拉伸时大得多，压缩时强度极限约为拉伸时强度极限的 3~5 倍。故铸铁适宜做承压构件。破坏断面的法线与轴线成  $45^\circ \sim 55^\circ$  的斜面，如图 1.36 所示，说明是切应力达到极限值而破坏。拉伸破坏时是沿横截面断裂，说明是拉应力达到极限值而破坏。其他脆性材料，如混凝土和石料，抗压强度也远高于抗拉强度。

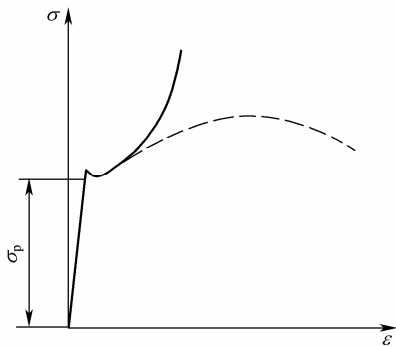


图 1.33

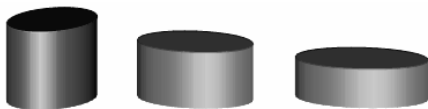


图 1.34

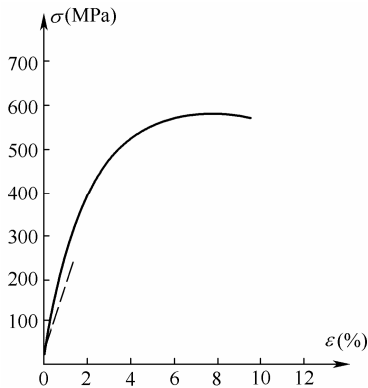


图 1.35



图 1.36

综上所述，塑性材料与脆性材料的力学性能有以下区别：

(1) 塑性材料在断裂前延伸率大，塑性性能好；而脆性材料直至断裂，变形都很小，塑性性能很差。其断裂破坏总是突然的，而塑性材料通常是在明显的形状改变后破坏。在工程中，需经锻压、冷加工的构件或承受冲击载荷的构件，宜采用塑性材料。

(2) 多数塑性材料抵抗拉压变形时，其弹性模量和屈服应力基本一致，所以其应用范围广，既可用于受拉构件，也可用于受压构件。在土木工程中，出于经



济性的考虑,常用塑性材料制作受拉构件。而脆性材料抗压强度远高于其抗拉强度,因此用脆性材料制作受压构件,如建筑物的基础、机器的底座等。

## 1.7 轴向拉(压)杆的强度计算

由上节材料的拉伸和压缩试验可知:脆性材料的应力达到强度极限 $\sigma_b$ 时,会发生断裂;塑性材料的应力达到屈服极限 $\sigma_s$ 时,会发生明显的塑性变形。断裂当然是不容许的,但是构件发生较大的变形也是不容许的。由于各种原因使结构丧失其正常工作能力的现象,称为失效。因此,断裂和屈服或出现较大变形都是破坏的形式。材料失效时的应力称为极限应力,塑性材料通常以屈服应力 $\sigma_s$ 作为极限应力,脆性材料以强度极限 $\sigma_b$ 作为极限应力。

构件在载荷作用下的实际应力称为工作应力。保证构件有足够的强度,要求构件的工作应力必须小于材料的极限应力。为了保证有一定的强度储备,在强度计算中,引进一个大于1的安全系数,设定构件工作时的最大容许值,即许用应力,用 $[\sigma]$ 表示,即

$$\text{塑性材料:} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s} \quad (1.12)$$

$$\text{脆性材料:} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b} \quad (1.13)$$

式中 $n_s$ 、 $n_b$ 分别为塑性材料和脆性材料的安全系数,确定安全系数时,应考虑以下因素:①材质的均匀性、质地好坏、是塑性还是脆性;②实际构件简化过程和计算方法的精确程度;③载荷情况,包括对载荷的估算是否准确、是静载还是动载;④构件的重要性、工作条件等。一般在常温、静载下,对塑性材料取 $n_s = 1.2 \sim 2.5$ ,对脆性材料一般取 $n_b = 2 \sim 3.5$ ,甚至更大。

于是得到轴向拉(压)杆的强度条件为:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (1.14)$$

对于轴向拉伸和压缩的等直杆,强度条件可以表示为:

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (1.15)$$

式中, $\sigma_{\max}$ 为杆件横截面上的最大正应力; $F_{N\max}$ 为杆件的最大轴力, $A$ 为横截面积; $[\sigma]$ 为材料的许用应力。

如对截面变化的拉(压)杆件(如阶梯形杆),则需要求出每一段内的正应力,找出最大值,再应用强度条件。

根据强度条件,可以解决以下三方面问题。

(1) 强度校核:若已知拉压杆的截面尺寸、载荷大小以及材料的许用应力,即可用公式(1.15)验算不等式是否成立,确定强度是否足够。



成

(2) 设计截面: 若已知拉压杆承受的载荷和材料的许用应力, 则强度条件变

$$A \geq \frac{F_{N\max}}{[\sigma]} \quad (1.16)$$

可确定构件所需要的横截面面积的最小值。

(3) 确定承载能力: 若已知拉压杆的截面尺寸和材料的许用应力, 则强度条件变成

$$F_{N\max} \leq A[\sigma] \quad (1.17)$$

可确定构件所能承受的最大轴力。

**例 1.7** 图 1.37 (a) 为简易三角形托架的示意图,  $BC$  为圆截面钢杆,  $AB$  为木杆,  $P=10\text{KN}$ , 钢杆  $BC$  的横截面积为  $A_{BC}=600\text{mm}^2$ , 许用应力  $[\sigma]_{BC}=160\text{MPa}$ , 木杆  $AB$  的横截面积  $A_{AB}=10000\text{mm}^2$ , 许用应力  $[\sigma]_{AB}=7\text{MPa}$ , 试

- (1) 校核各杆的强度。
- (2) 求许可载荷  $[P]$ 。
- (3) 根据许可载荷, 设计钢杆  $BC$  所需的直径。

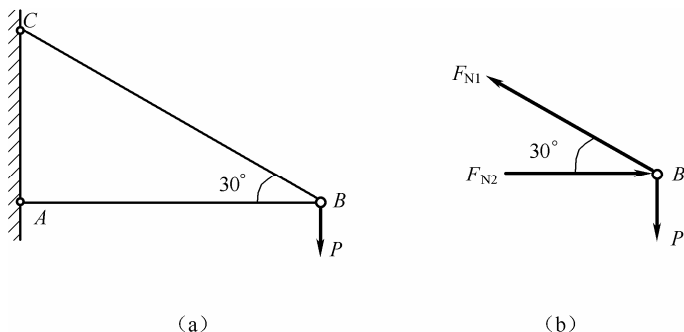


图 1.37

**解:** (1) 校核各杆的强度, 先计算  $AB$ 、 $BC$  杆的轴力。

设  $BC$  杆的轴力为  $F_{N1}$ ,  $AB$  杆的轴力为  $F_{N2}$ , 根据结点  $B$  的平衡 (图 1.37 (b)) 有

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2} - F_{N1} \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1} \sin 30^\circ - P = 0$$

解得

$$F_{N1} = 2P \text{ (拉)}, \quad F_{N2} = \sqrt{3}P \text{ (压)}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{N2}}{A_{AB}} = \frac{1.73 \times 10^4}{10000 \times 10^{-6}} = 1.73 \times 10^6 \text{ Pa} < 7\text{MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{N1}}{A_{BC}} = \frac{20 \times 10^3}{600 \times 10^{-6}} = 33.3 \times 10^6 \text{ Pa} < 160\text{MPa}$$



两杆内的正应力都远低于材料的许用应力，结构安全。

(2) 求许可载荷。

由公式 (1.17) 可知，当  $AB$  杆达到许用应力时

$$F_{N2} = \sqrt{3}P \leq A_{AB}[\sigma]_{AB} = 7 \times 10^6 \times 10000 \times 10^{-6} = 70000\text{N} = 70\text{kN}$$

得  $[P] \leq 40.4\text{kN}$ 。

当  $BC$  杆达到许用应力时

$$F_{N1} = 2P \leq A_{BC}[\sigma]_{BC} = 160 \times 10^6 \times 600 \times 10^{-6} = 96000\text{N} = 96\text{kN}$$

得  $[P] \leq 48\text{kN}$ 。

取两者中较小值，因此该托架的最大许可载荷为  $[P] = 40.4\text{kN}$ 。

(3) 设计钢杆  $BC$  所需的直径。由以上计算可知， $[P] = 40.4\text{kN}$  时， $BC$  杆未达到强度极限，所以可减少其截面积。

$$F_{N1} = 2[P] = 2 \times 40.4 = 80.8\text{kN}$$

由公式 (1.16)

$$A_{BC} \geq \frac{F_{N1}}{[\sigma]_{BC}} = \frac{80.8 \times 10^3}{160 \times 10^6} = 5.05 \times 10^{-4} \text{m}^2$$

所以  $BC$  杆的直径为

$$d_{BC} = \sqrt{\frac{4A_{BC}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 5.05 \times 10^{-4}}{\pi}} = 2.54 \times 10^{-2} \text{m} = 25.4\text{mm}$$

## 1.8 应力集中的概念

在 1.3 节中推导的正应力计算公式仅适用于等截面直杆，其横截面上的应力是均匀分布的。对于横截面平缓变化的轴向拉压杆，应力可近似的按等截面计算。由于实际需要，有些零件必须有切口、切槽、油孔、螺纹、轴肩等，以致在这些部位上截面尺寸发生突然变化。如开有切口的板条（图 1.38）受拉时，在通过切口的横截面上应力的分布就不再是均匀的，在切口附近的局部区域内，应力的数值剧烈增加，而在离开这一区域稍远的地方，应力迅速下降而趋于均匀。由于杆件外形突然变化，而引起局部应力骤增的现象，称为应力集中。

若发生应力集中的截面上最大正应力为  $\sigma_{\max}$ ，同一截面上的平均应力为  $\sigma_0$ ，则比值

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \quad (1.18)$$

称为理论应力集中因数。试验结果表明：截面尺

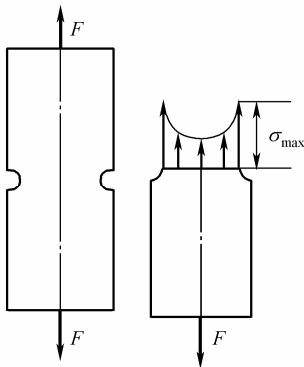


图 1.38



寸变化越急剧,孔越小,角越尖,应力集中的程度就越严重,局部出现的最大应力 $\sigma_{\max}$ 就越大。鉴于应力集中往往会削弱杆件的强度,因此在设计零件时应尽量避免带尖角的孔和槽,对阶梯轴的过渡圆弧,半径应尽量大一些。尽可能避免或降低应力集中的影响。

不同的材料对应力集中的敏感程度不同。塑性材料存在屈服阶段,当局部的最大应力达到材料的屈服强度时,若继续增大载荷,则应力不再增大,应变可以继续增长,增加的载荷由截面上尚未屈服的材料来承担,从而使截面上其他部分的应力相继增大到屈服极限,直至整个截面上的应力都达到屈服极限时,杆件才会因屈服而丧失正常工作的能力,如图 1.39 所示。因此,由塑性材料制成的零件在静载作用下,可以不考虑应力集中的影响。对于脆性材料,由于没有屈服阶段,当局部最大应力达到强度极限时就在该处裂开。所以对组织均匀的脆性材料,应力集中将极大地降低构件的强度。

对组织不均匀的脆性材料,如铸铁,在它内部有许多片状石墨(不能承担载荷),这相当于材料内部有许多小孔穴,材料本身就具有严重的应力集中,因此由于截面尺寸改变引起的应力集中,对这种材料构件的承载能力没有明显的影响。

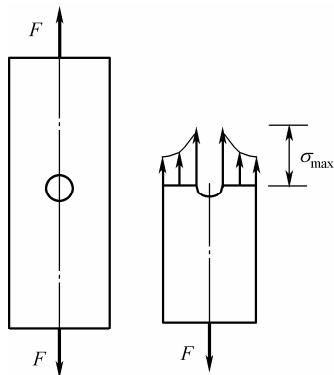
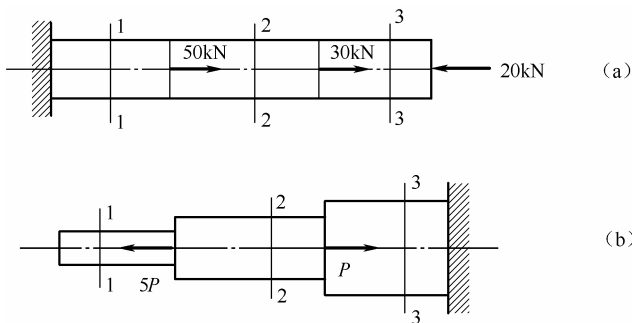


图 1.39

## 习题 1

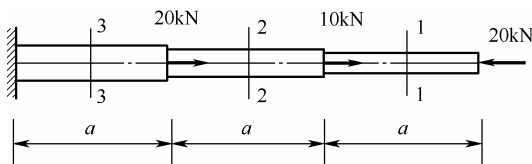
1.1 试求图示各杆 1-1、2-2、3-3 截面的轴力,并作轴力图。



题 1.1 图

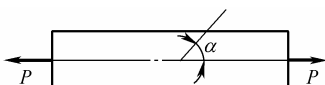
1.2 图示阶梯状直杆,受力如图,已知横截面面积 $A_1 = 200\text{mm}^2$ , $A_2 = 300\text{mm}^2$ , $A_3 = 400\text{mm}^2$ , $a = 200\text{mm}$ ,试求横截面上的最大、最小应力。





题 1.2 图

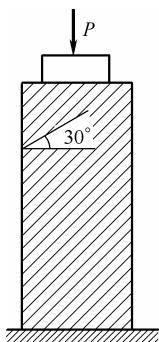
1.3 图示等直杆，受轴向拉力  $P = 20\text{kN}$ ，已知杆的横截面积  $A = 100\text{mm}^2$ ，试求出  $\alpha = 0^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $90^\circ$  时各斜截面上的正应力和切应力。



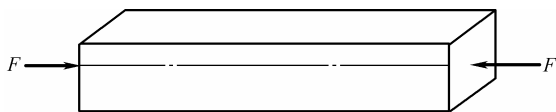
题 1.3 图

1.4 木立柱承受压力  $P$ ，上面放有钢块。如图所示，钢块截面积  $A_1$  为  $5\text{cm}^2$ ， $\sigma_{\text{钢}} = 35\text{MPa}$ ，木柱截面积  $A_2 = 65\text{cm}^2$ ，求木柱顺纹方向剪应力大小及指向。

1.5 图示等直杆，受轴向压力，横截面为  $75\text{mm} \times 55\text{mm}$ ，欲使杆任意截面正应力不超过  $2.5\text{MPa}$ ，切应力不超过  $0.75\text{MPa}$ ，试求最大载荷  $F$ 。



题 1.4 图



题 1.5 图

1.6 题 1.2 图所示杆中，材料常数  $E = 200\text{GPa}$ ，试求杆件的总变形量。

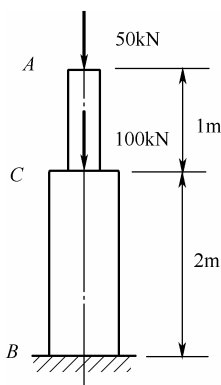
1.7 横截面为正方形的木桩，其受力情况和各段长度如图所示。 $AC$  段边长为  $100\text{mm}$ ， $CB$  段边长为  $200\text{mm}$ ，材料可认为符合胡克定律，其纵向弹性模量  $E = 10\text{GPa}$ 。不计柱的自重，求：柱端  $A$  截面的位移。

1.8 某拉伸试验机的示意图如图所示。设试验机的  $CD$  杆与试样  $AB$  同为低碳钢制成， $\sigma_p = 200\text{MPa}$ ， $\sigma_s = 250\text{MPa}$ ， $\sigma_b = 500\text{MPa}$ 。试验机的最大拉力为  $10\text{kN}$ 。试求：

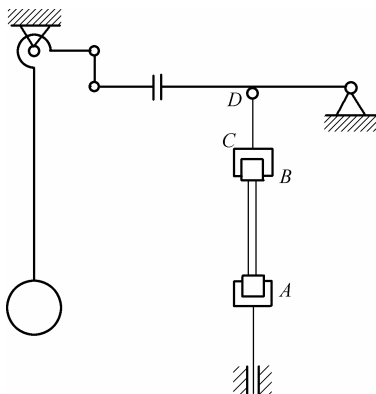
- (1) 用此试验机做拉断试验时试样最大直径可达多少？
- (2) 设计时若取安全系数  $n = 2$ ，则  $CD$  杆的截面面积为多少？



(3) 若试样的直径  $d=10\text{mm}$ ，今欲测弹性模量  $E$ ，则所加拉力最大不应超过多少？

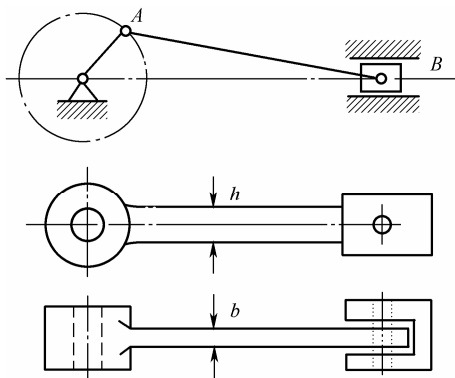


题 1.7 图



题 1.8 图

1.9 冷镦机的曲柄滑块机构如图所示。镦压工件时连杆接近水平位置，承受的镦压力  $P=1100\text{kN}$ 。连杆的截面为矩形，高与宽之比为  $h:b=1:5$ 。材料许用应力为  $[\sigma]=58\text{MPa}$ ，试确定截面尺寸  $h$  和  $b$ 。



题 1.9 图

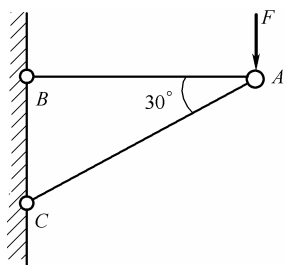
1.10 图示为一个三角形托架，已知：杆  $AB$  是圆截面钢杆， $[\sigma]=170\text{MPa}$ ，杆  $AC$  是正方形截面木杆，许用压应力  $[\sigma]=12\text{MPa}$ ，载荷  $F=60\text{kN}$ ，试选择钢杆的圆截面直径  $d$  和木杆的正方形截面边长  $a$ 。

1.11 图示三角形由  $AC$  和  $BC$  二杆组成。杆  $AC$  由两根 No.12b 的槽钢组成，许用应力为  $[\sigma]=160\text{MPa}$ ；杆  $BC$  为一根 No.22a 的工字钢，许用应力为  $[\sigma]=100\text{MPa}$ 。求该结构承受的许可载荷  $[P]$ 。

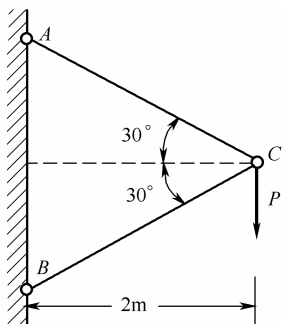
1.12 图示拉杆沿斜截面  $m-n$  由两部分胶合而成。设在胶合面上许用拉应力  $[\sigma_t]=100\text{MPa}$ ，许用切应力  $[\tau]=50\text{MPa}$ ，并设胶合面的强度控制杆件拉力。试问：



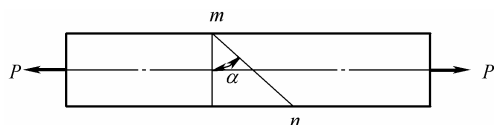
为使杆件承受最大拉力  $P$ ,  $\alpha$  角的值应为多少? 若杆件横截面面积为  $4\text{cm}^2$ , 并规定  $\alpha \leq 60^\circ$ , 试确定许可载荷  $P$ 。



题 1.10 图



题 1.11 图

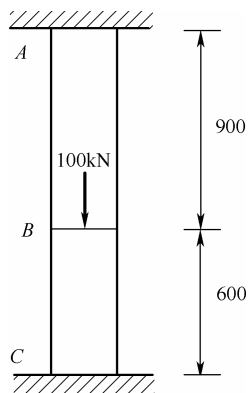


题 1.12 图

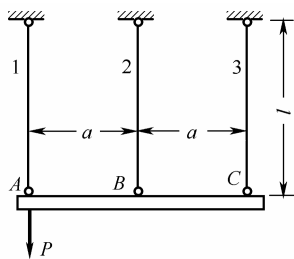
1.13 如题 1.11 所示结构, 试求节点  $C$  的水平位移, 设  $EA$  为常数。

1.14 有一两端固定的钢杆, 其截面面积为  $A=1000\text{mm}^2$ , 载荷如题图所示。试求各段杆内的应力。

1.15 在图示结构中, 假设  $AC$  横梁为刚体, 杆 1、2、3 的横截面面积相等, 材料相同。试求三杆的轴力。



题 1.14 图



题 1.15 图