第一部分　课后习题详解

第 1 章　函数、极限与连续

习题 1.1

1．求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{4-x^2}$；　　（2）$y=\dfrac{3x}{\sqrt{9-x^2}}$；

（3）$y=\tan x+\arcsin\dfrac{x}{4}$；　　（4）$y=\log_2(x+1)$；

（5）$y=\arcsin(1+x)-\dfrac{2}{\ln(1+x)}$；　　（6）$y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x}{x-2}$．

解　（1）要使函数有意义，只需 $4-x^2\geqslant 0$，$x\neq 0$，即 $-2\leqslant x<0$，$0<x\leqslant 2$，故函数的自然定义域为 $[-2,0)\cup(0,2]$．

（2）要使函数有意义，只需 $9-x^2>0$，即 $-3<x<3$，故函数的自然定义域为 $(-3,3)$．

（3）要使函数有意义，只需 $-1\leqslant\dfrac{x}{4}\leqslant 1$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $-4\leqslant x\leqslant 4$，$x\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$，故函数的自然定义域为 $\left[-4,-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},4\right]$．

（4）要使函数有意义，只需 $x+1>0$，即 $x>-1$，故函数的自然定义域为 $(-1,+\infty)$．

（5）要使函数有意义，只需 $-1\leqslant 1+x\leqslant 1$，$1+x>0$，$1+x\neq 1$，即 $0<1+x<1$，即 $-1<x<0$，故函数的自然定义域为 $(-1,0)$．

（6）要使函数有意义，只需 $x\neq 0$，$x-2\neq 0$，即 $x\neq 0$，$x\neq 2$，故函数的自然定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$．

2．判断下列各组中的两个函数是否相同，并说明理由：

（1）$y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$y=x\sqrt[3]{x-1}$；　　（2）$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$y=x+1$；

（3）$y=\sqrt{1-\sin^2 x}$，$y=\cos x$；　　（4）$y=\mathrm{e}^x$，$s=\mathrm{e}^t$．

解 （1）相同．因为定义域均为$(-\infty,+\infty)$，对应法则也相同．

（2）不相同．因为定义域不同，前者为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，而后者为$(-\infty,+\infty)$．

（3）不相同．因为对应法则不同，前者为$y=|\cos x|$，而后者为$y=\cos x$．

（4）相同．因为定义域均为$(-\infty,+\infty)$，对应法则也相同．

3．下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

（1）$y=\sqrt{1-x^2}+|x|$；　　（2）$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

（3）$y=x^2+3\sin 2x$；　　（4）$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

（5）$y=x(1-x)(1+x)$；　　（6）$y=a^x+a^{-x}$　$(a>0,a\neq 1)$．

解 （1）函数的定义域关于原点对称，且$f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}+|-x|=\sqrt{1-x^2}+|x|=f(x)$，故函数为偶函数．

（2）函数的定义域关于原点对称，且$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)$，故函数为奇函数．

（3）尽管函数的定义域关于原点对称，但$f(-x)\neq -f(x),\ f(-x)\neq f(x)$，故函数既非奇函数，也非偶函数．

（4）函数的定义域关于原点对称，且$f(-x)=\ln\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$，故函数为奇函数．

（5）因为函数的定义域关于原点对称，且$f(-x)=(-x)[1-(-x)][1+(-x)]=-x(1-x)(1+x)=-f(x)$，故函数为奇函数．

（6）函数的定义域关于原点对称，且$f(-x)=a^{-x}+a^{-(-x)}=a^x+a^{-x}=f(x)$，故函数为偶函数．

4．求下列函数的反函数：

（1）$y=\dfrac{x-1}{x+1}$；　　（2）$y=\ln(x+2)+1$；　　（3）$y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$．

解 （1）由$y=\dfrac{x-1}{x+1}$解得$x=\dfrac{1+y}{1-y}$；将y与x互换得函数的反函数为$y=\dfrac{1+x}{1-x}$．

（2）由$y=\ln(x+2)+1$解得$x=e^{y-1}-2$；将y与x互换得函数的反函数为$y=e^{x-1}-2$．

（3）令$t=e^x$，显然$t>0$；由$y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{t^2-1}{2t}$，即$t^2-2yt-1=0$解得$t=y+\sqrt{y^2+1}$，从而有$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$；将$y$与$x$互换得函

数的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$．

5．设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$．

解　令 $t=x-\dfrac{1}{x}$，则有 $f(t)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=x^2-2+\dfrac{1}{x^2}+2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=t^2+2$，故有

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+2=\frac{1}{x^2}+2.$$

6．设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & |x|\leqslant 1\\ 2x-1, & |x|>1\end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ 及 $f(3)$．

解　将 $x=-1,0,1$ 分别代入分段解析式的第一个式子得

$$f(-1)=-1+1=0,\ f(0)=0+1=1,\ f(1)=1+1=2;$$

将 $x=-2,3$ 分别代入分段解析式的第二个式子得

$$f(-2)=2\cdot(-2)-1=-5,\ f(3)=2\cdot 3-1=5.$$

7．设　$f(x)=\mathrm{e}^x$，　$g(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$．

解　显然 $\{-1,0,1\}=R_g\subseteq D_f=(-\infty,+\infty)$ 且 $(0,+\infty)=R_f\subseteq D_g=(-\infty,+\infty)$，由复合函数的定义直接可得

$$f[g(x)]=\mathrm{e}^{g(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ 1/\mathrm{e}, & |x|>1.\end{cases}$$

另一方面，当 $|\mathrm{e}^x|=\mathrm{e}^x<1$，即 $x<0$ 时，$g[f(x)]=g(\mathrm{e}^x)=1$；当 $|\mathrm{e}^x|=\mathrm{e}^x=1$，即 $x=0$ 时，$g[f(x)]=g(\mathrm{e}^x)=0$；当 $|\mathrm{e}^x|=\mathrm{e}^x>1$，即 $x>0$ 时，$g[f(x)]=g(\mathrm{e}^x)=-1$．故有

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

8．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，求下列复合函数的定义域：

（1）$f(1-x)$；　　（2）$f\left(x-\dfrac{1}{4}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$；

（3）$f(\ln x)$；　　（4）$f(\mathrm{e}^{-x})$．

解　（1）由 $0<1-x\leqslant 1$ 得 $0\leqslant x<1$，故函数 $f(1-x)$ 的定义域为 $[0,1)$．

（2）由 $0<x-\dfrac{1}{4}\leqslant 1, 0<x+\dfrac{1}{4}\leqslant 1$ 得 $\dfrac{1}{4}<x\leqslant\dfrac{5}{4}, -\dfrac{1}{4}<x\leqslant\dfrac{3}{4}$，从而得

$\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{3}{4}$，故函数 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)+f\left(x+\frac{1}{4}\right)$ 的定义域为 $(\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$.

（3）由 $0 < \ln x \leqslant 1$ 得 $1 < x \leqslant \mathrm{e}$，故函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(1,\mathrm{e}]$.

（4）由 $0 < \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ 得 $x \geqslant 0$，故函数 $f(\mathrm{e}^{-x})$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.

9．在下列各题中，求由所给函数复合而成的复合函数，并求对应于所给自变量值的函数值：

（1）$y=u^2,\ u=2\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{6}$；

（2）$y=\sqrt{u},\ u=x^2+5,\ x_0=2$；

（3）$y=\mathrm{e}^u,\ u=\sqrt{v},\ v=\ln t,\ t_1=1, t_2=\sqrt[4]{\mathrm{e}}$.

解 （1）$y=u^2=(2\cos x)^2=4\cos^2 x,$

$$y_0=y|_{x=x_0}=4\cos^2 x_0=4\cos^2\frac{\pi}{6}=4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3 .$$

（2）$y=\sqrt{u}=\sqrt{x^2+5},\ y_0=y|_{x=x_0}=\sqrt{x_0^2+5}=\sqrt{2^2+5}=3$.

（3）$y=\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^{\sqrt{v}}=\mathrm{e}^{\sqrt{\ln t}},\ y_1=y|_{t=t_1}=\mathrm{e}^{\sqrt{\ln t_1}}=\mathrm{e}^{\sqrt{\ln 1}}=\mathrm{e}^0=1,$

$$y_2=y|_{t=t_2}=\mathrm{e}^{\sqrt{\ln t_2}}=\mathrm{e}^{\sqrt{\ln\sqrt[4]{e}}}=\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\sqrt{\mathrm{e}} .$$

10．假设某种商品的需求量 Q 是单价 p（单位：元）的函数：$Q=1200-80p$；商品的总成本是需求量 Q 的函数：$C=25000+5Q$；每单位商品需要纳税 2 元．试将销售利润 L 表示为单价 p 的函数．（提示：销售利润为销售收入扣除总成本和总纳税额后的余额）.

解 因为产品的销售收入为 $R=Q\cdot p=1200p-80p^2$，故销售利润为

$$\begin{aligned}L&=R-C-2Q=1200p-80p^2-[25000+5(1200-80p)]-2(1200-80p)\\&=-80p^2+1760p-33400 .\end{aligned}$$

11．某厂生产某种产品 1000 吨，每吨定价为 130 元，销售量在 700 吨以内时，按原价销售，超过 700 吨时超过部分打九折出售．试将销售总收益与销售量的函数关系用数学表达式表出．

解 设变量 x 和 R 分别表示销售量（单位为吨）和销售收益（单位为元），由题意，当 $0 \leqslant x \leqslant 700$ 时，$R=130x$（元）；当 $700 < x \leqslant 1000$ 时，$R=700\times130+(x-700)\times0.9\times130=117x+9100$. 故所求的函数关系为

$$R=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 700,\\ 117x+9100, & 700<x\leqslant 1000.\end{cases}$$

习题 1.2

1. 观察下列数列当其项数 n 无限增大时的变化趋势，指出是收敛还是发散. 如果收敛，写出其极限：

（1）$x_n=\dfrac{n+2}{n}$；（2）$x_n=(-1)^n\dfrac{2}{2^n}$；（3）$x_n=\dfrac{2^n-3^n}{3^n}$；

（4）$x_n=[1+(-1)^{n-1}]n$；（5）$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；（6）$x_n=\dfrac{n!}{2^n}$.

解　（1）容易看出，当 n 无限增大时，对应项 $\dfrac{n+2}{n}$ 无限趋近于常数 1，故该数列收敛，其极限为 1.

（2）容易看出，当 n 无限增大时，对应项 $(-1)^n\dfrac{2}{2^n}$ 无限趋近于常数 0，故该数列收敛，其极限为 0.

（3）容易看出，当 n 无限增大时，对应项 $\dfrac{2^n-3^n}{3^n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1$ 无限趋近于常数 -1，故该数列收敛，其极限为 -1.

（4）容易看出，当 n 无限增大时，对应项 $[1+(-1)^{n-1}]n$ 始终在不断增大的某一偶数和 0 之间跳动，因而该数列发散.

（5）容易看出，当 n 无限增大时，对应项 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 无限趋近于常数 0，故该数列收敛，其极限为 0.

（6）容易看出，当 n 无限增大时，对应项 $x_n=\dfrac{n!}{2^n}$ 也无限增大，因而该数列发散.

2. 根据数列极限的定义证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$；（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$.

证　（1）对 $\forall\varepsilon>0$，由于

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2},$$

故要使 $|x_n-0|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$ 即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 即可.

于是，取正整数 $N\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-0|<\varepsilon$. 根据数列极限定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\,.$$

（2）对 $\forall\varepsilon>0$，由于

$$|x_n-1|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n^2}\,,$$

故要使 $|x_n-1|<\varepsilon$，只要 $\frac{a^2}{n^2}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{|a|}{\sqrt{\varepsilon}}$ 即可.

于是，取正整数 $N\geqslant\frac{|a|}{\sqrt{\varepsilon}}$，则当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-1|<\varepsilon$．根据数列极限定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1\,.$$

（3）对 $\forall\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<2$），由于

$$\left|x_n-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2n-1}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{5}{3(3n+1)}<\frac{2}{3n+1}\,,$$

故要使 $\left|x_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{2}{3n+1}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{2-\varepsilon}{3\varepsilon}$ 即可.

于是，取正整数 $N\geqslant\frac{2-\varepsilon}{3\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，总有 $\left|x_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$．根据数列极限定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}\,.$$

3．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$．

证　对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，由三角不等式，对上述的 n，有 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$．故

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|\,.$$

需要指出的是，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在并不能推出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，例如 $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

习题 1.3

1．根据函数极限的定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$；　（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$；　（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}}=0$．

证 （1）对$\forall\varepsilon>0$，由于

$$\left|\frac{x+1}{2x}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{|2x|}=\frac{1}{2}\frac{1}{|x|},$$

故要使$\left|\frac{x+1}{2x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{2}\frac{1}{|x|}<\varepsilon$即$|x|>\frac{1}{2\varepsilon}$即可.

于是，取正数$X=\frac{1}{2\varepsilon}$，则当$|x|>X$时，就有$\left|\frac{x+1}{2x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. 根据定义 1-14，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

（2）对$\forall\varepsilon>0$（不妨设$\varepsilon<1$），由于

$$|\mathrm{e}^x-0|=\mathrm{e}^x,$$

故要使$|\mathrm{e}^x-0|<\varepsilon$，只要$\mathrm{e}^x<\varepsilon$即$x<\ln\varepsilon$即可.

于是，取正数$X=-\ln\varepsilon$，则当$x<-X$时，就有$|\mathrm{e}^x-0|<\varepsilon$. 根据定义 1-14 的说明，有

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0.$$

（3）对$\forall\varepsilon>0$（不妨设$\varepsilon<1$），由于

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}}-0\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x+1}},$$

故要使$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}}-0\right|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{\sqrt{x+1}}<\varepsilon$即$x>\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$即可.

于是，取正数$X=\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$，则当$x>X$时，就有$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}}-0\right|<\varepsilon$. 根据定义 1-14 的说明，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}}=0.$$

2．根据函数极限的定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to1}(4x+5)=9$；（2）$\lim\limits_{x\to2}(3x-1)=5$；（3）$\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-x^2}{1+x}=2$.

证 （1）对$\forall\varepsilon>0$，由于

$$|(4x+5)-9|=|4x-4|=4|x-1|,$$

故要使$|(4x+5)-9|<\varepsilon$，只要$4|x-1|<\varepsilon$即$|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$即可.

于是，取正数$\delta=\frac{\varepsilon}{4}$，则当$0<|x-1|<\delta$时，就有$|(4x+5)-9|<\varepsilon$. 根据定义 1-15，有

$$\lim_{x\to 1}(4x+5)=9.$$

（2）对 $\forall\varepsilon>0$，由于

$$|(3x-1)-5|=|3x-6|=3|x-2|,$$

故要使 $|(3x-1)-5|<\varepsilon$，只要 $3|x-2|<\varepsilon$ 即 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ 即可.

于是，取正数 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，就有 $|(3x-1)-5|<\varepsilon$．根据定义 1-15，有

$$\lim_{x\to 2}(3x-1)=5.$$

（3）对 $\forall\varepsilon>0$，由于当 $x\neq -1$ 时

$$\left|\frac{1-x^2}{1+x}-2\right|=|1-x-2|=|x+1|,$$

故要使 $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x}-2\right|<\varepsilon$，只要 $|x+1|<\varepsilon$ 即可.

于是，取正数 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-(-1)|=|x+1|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x}-2\right|<\varepsilon$．根据定义 1-15，有

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{1+x}=2.$$

3．证明：函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时极限为零.

证　对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $||x|-0|=|x|$，故要使 $||x|-0|<\varepsilon$，只要 $|x|<\varepsilon$ 即可．于是，取正数 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有 $||x|-0|<\varepsilon$．根据定义 1-15，有

$$\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

4．求下列函数当 $x\to 0$ 时的左右极限，并说明它们当 $x\to 0$ 时的极限是否存在：

（1）$f(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<0,\\ 1, & x=0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$；　　（2）$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

解　（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$，所以

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

从而由定理 1-3 可知，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$，所以

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

从而由定理 1-3 可知，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

习题 1.4

1. 下列函数在其自变量的指定变化过程中哪些是无穷小？哪些是无穷大？哪些既不是无穷小也不是无穷大？

（1）$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$，当 $x\to 1$ 时；（2）$f(x)=x^2$，当 $x\to\infty$ 时；

（3）$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，当 $x\to\infty$ 时；（4）$f(x)=\sqrt{x}$，当 $x\to 2$ 时.

解 （1）因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq 0$，故函数 $f(x)$ 不是当 $x\to 1$ 时的无穷小；同样，利用函数极限的定义可以证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$，即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq\infty$，故函数也不是当 $x\to 1$ 时的无穷大.

（2）利用函数极限的定义可以证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，故函数 $f(x)$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷大.

（3）利用函数极限的定义可以证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，故函数 $f(x)$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

（4）因为 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}\neq 0$，故函数 $f(x)$ 不是当 $x\to 2$ 时的无穷小；同样，利用函数极限定义可以证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$，即 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq\infty$，故函数也不是当 $x\to 2$ 时的无穷大.

2. 利用无穷小的性质求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{2}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2\sin x+1}$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 （1）因为当 $x\to\infty$ 时，函数 $\dfrac{1}{x}$ 是无穷小；$|1+\cos x|\leqslant 1+|\cos x|\leqslant 2$，即函数 $1+\cos x$ 有界．所以由无穷小的性质 2 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{x}=0.$$

（2）由函数极限的定义可以证明$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，即当$x\to 0$时，函数$x^2$是无穷小；$\left|\sin\frac{2}{x}\right|\leqslant 1$，即函数$\sin\frac{2}{x}$有界．所以由无穷小的性质 2 得

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{2}{x}=0.$$

（3）由函数极限的定义可以证明$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$，即当$x\to\infty$时，函数$\frac{1}{x^2}$是无穷小；$|2\sin x+1|\leqslant 2|\sin x|+1\leqslant 3$，即函数$2\sin x+1$有界．所以由无穷小的性质 2 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin x+1}{x^2}=0,$$

再由定理 1-4 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2\sin x+1}=\infty.$$

（4）由例 1-10（1）知，当$x\to\infty$时，函数$\frac{1}{x}$是无穷小；$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2}$，即函数$\arctan x$有界．所以由无穷小的性质 2 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

习题 1.5

1．对下列陈述作出判断，如果正确，说明理由；如果错误，给出反例：

（1）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在；

（2）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在；

（3）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$不存在．

解　（1）正确．因为若$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，则根据极限的四则运算法则，有$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[(f(x)+g(x))-f(x)]$存在，矛盾．

（2）错误．例如，$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$与$\lim\limits_{x\to 0}(-\operatorname{sgn}x)$都不存在，但$\lim\limits_{x\to 0}[\operatorname{sgn}x+(-\operatorname{sgn}x)]=0$．

（3）错误．例如，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$即不存在，但$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{x}=1$．

2．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+1}{x^2-2x+3}$；（2）$\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^3+x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$；（6）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-3x-4}$；

（7）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-2x+3}$；

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-3x-1}$；（10）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$；

（11）$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$；（12）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

（13）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；（14）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(2n+3)(3n+4)}{n^3}$．

解（1）原式$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+3)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(3x)+\lim\limits_{x\to 1}1}{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2-\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}3}=\dfrac{3\cdot 1+1}{1^2-2\cdot 1+3}=2$．

（2）原式$=\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{(\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}x)^2+\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}x-\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}1}{(\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}x)^2+\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}1}=\dfrac{(\sqrt{5})^2+\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5})^2+1}=\dfrac{4+\sqrt{5}}{6}$．

（3）原式$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$．

（4）原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)}{x(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^2+1}=\dfrac{0-1}{0^2+1}=-1$．

（5）原式$=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=0^2+1=1$．

（6）原式$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{4-2}{4+1}=\dfrac{2}{5}$．

（7）原式$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h+x)(x+h-x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x+0=2x$．

（8）先用x^2去除分子和分母，然后取极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{0}{1}=0\text{．}$$

（9）先用x^2去除分子和分母，然后取极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

（10）先用 x 去除分子和分母，然后取极限，并利用无穷小的性质，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1.$$

（11）原式 $=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4-(x+2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-1}{x+2}=\dfrac{-1}{2+2}=-\dfrac{1}{4}$.

（12）原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{-(1+x+x^2)}$

$=\dfrac{1+2}{-(1+1+1^2)}=-1$.

（13）原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

$=2-0=2$.

（14）先用 n^3 去除分子和分母，然后取极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(2n+3)(3n+4)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n}\right)}{1}=1\cdot2\cdot3=6.$$

3．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-\sqrt{3+2x}}{x^2+1}$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x-1}$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x}{(x-3)^2}$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{x}$；（6）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-2\sqrt{x}}{x^2-1}$.

解　（1）由于 $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)=1$，令 $u=3+2x$，则由定理 1-8 得 $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{3+2x}=\lim\limits_{u\to1}\sqrt{u}=1$，故

$$\lim_{x\to-1}\frac{x-\sqrt{3+2x}}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}x-\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{3+2x}}{(\lim\limits_{x\to-1}x)^2+\lim\limits_{x\to-1}1}=\frac{-1-1}{(-1)^2+1}=-1.$$

（2）由于 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)=1$，令 $u=1+x^2$，则由定理 1-8 得 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}=\lim\limits_{u\to 1}\sqrt{u}=1$，因而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x^2}+1)=1+1=2\ .$$

（3）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-1}=\infty\ .$$

（4）原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}=\dfrac{0}{1}=0$.

（5）原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(1+\sqrt{1-2x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1+\sqrt{1-2x}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{1}}=1$.

（6）原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{(x-1)(x+1)(\sqrt{1+3x}+2\sqrt{x})}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)(\sqrt{1+3x}+2\sqrt{x})}=\frac{-1}{(1+1)(\sqrt{4}+2\sqrt{1})}=-\frac{1}{8}\ .$$

4．设 $f(x)=\dfrac{4x^2+3}{x-1}+ax+b$，若已知：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

试分别求这三种情形下常数 a 与 b 的值.

解　因为 $f(x)=\dfrac{4x^2+3}{x-1}+ax+b=\dfrac{(a+4)x^2+(b-a)x+3-b}{x-1}$

（1）要使 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，只要 $a+4=0$ 且 $b-a=0$ 即可，因而 $a=-4,b=-4$.

（2）要使 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$，只要 $a+4=0$ 且 $b-a=2$ 即可，因而 $a=-4,b=-2$.

（3）要使 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，只要 $a+4\neq 0$ 即可，因而 $a\neq -4$, b 为任意常数.

5．已知 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}$ 存在且等于 a，求常数 k 与 a 的值.

解　方法一．因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=a$，所以 x^2-2x+k 必含有因式 $x-3$，而其另一个因式必为 $x+(a-3)$，因而 $x^2-2x+k=(x-3)(x+a-3)=x^2+(a-6)x-3(a-3)$，从而 $a-6=-2$ 且 $-3(a-3)=k$，最后解得 $a=4,k=-3$.

方法二．因为 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=a$，所以 $x=3$ 必为方程 $x^2-2x+k=0$ 的根，设该方程另一根为 x^*，则根据一元二次方程根与系数的关系，必有 $x^*+3=-\dfrac{-2}{1}=2$ 即 $x^*=-1$，且 $k=\dfrac{k}{1}=3\cdot(-1)=-3$，从而 $a=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}=4$．

习题 1.6

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}$（$\omega\neq0$）；

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin3x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}n\sin\dfrac{\pi}{n}$；

（4）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{1-x^2}$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x\sin x}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x}$；

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}2^{n+1}\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x\neq0$）；

（9）$\lim\limits_{x\to0}x\cot x$．

解　（1）原式 $=\omega\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega\cdot1=\omega$．

（2）原式 $=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin2x}{2x}}{\frac{\sin3x}{3x}}=\dfrac{2}{3}\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{3}$．

（3）原式 $=\pi\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi\cdot1=\pi$．

（4）原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x+1)(1-x)}=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{-(x+1)}\cdot\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right]$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=-\dfrac{1}{2}\cdot1=-\dfrac{1}{2}$．

（5）原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2 2x}{x\sin x}=4\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin2x}{x}\cdot\cos x\right)=8\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos x$

$=8\cdot1\cdot1=8$．

（6）原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{\pi-2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{\dfrac{\pi}{2}-x}=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$.

（7）原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2\sin x}{2x+\sin x}\right)=1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{2x+\sin x}=1-\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\sin x}{2\sin x}}$

$$=1-\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}+\dfrac{1}{2}}=1-\frac{1}{\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}+\dfrac{1}{2}}=1-\frac{1}{\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

（8）原式$=2x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=2x\cdot 1=2x$.

（9）原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\dfrac{1}{1}\cdot 1=1$.

2．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\omega x)^{\frac{1}{x}}$（$\omega\neq 0$）；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{3}{x-1}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{4x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x}$.

解　（1）原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\omega x)^{\frac{1}{\omega x}\cdot\omega}=[\lim\limits_{x\to 0}(1+\omega x)^{\frac{1}{\omega x}}]^{\omega}=\mathrm{e}^{\omega}$.

（2）原式$=\lim\limits_{x\to 1}[1+2(1-x)]^{\frac{-6}{2(1-x)}}=[\lim\limits_{x\to 1}[1+2(1-x)]^{\frac{1}{2(1-x)}}]^{-6}=\mathrm{e}^{-6}$.

（3）原式$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^4=\mathrm{e}^4$.

（4）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{-x}\right)^{\frac{-x}{3}\cdot(-3)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{-x}\right)^{\frac{-x}{3}}\right]^{-3}=\mathrm{e}^{-3}$.

（5）原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{-x}\cdot(-2)}=[\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{-x}}]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

（6）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x-2}\right)^{x-2}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x-2}\right)^{2}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}}\right]^4\cdot 1=\mathrm{e}^4$.

3．利用极限存在准则证明：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{2}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^3+n}\right)=0$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$（$n\in\mathbf{N}^+$）；

（4）数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$的极限存在.

证　因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

故由夹逼准则得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

（2）因为

$$\frac{n}{n^3+n}\leqslant\frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n}{n^3+n}\leqslant\frac{n}{n^3+1},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}=0,$$

故由夹逼准则得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{2}{n^3+2}+\cdots+\frac{n}{n^3+n}\right)=0.$$

（3）因为$n\in\mathbf{N}^+$，所以当$x>0$时，$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$；当$-1<x<0$时，$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}1=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)=1,\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1$，故由夹逼准则得

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[n]{1+x}=1,\lim_{x\to 0^-}\sqrt[n]{1+x}=1,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1.$$

（4）将该数列记为$\{x_n\}$，显然有$x_n>0, x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$（$n\in\mathbf{N}^+$）.

首先，可以用数学归纳法证明$x_n<2$（$n\in\mathbf{N}^+$）．事实上，$x_1=\sqrt{2}<2$，若设$x_k<2$，则有$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，因而数列$\{x_n\}$有界；其次，我们可以证明$\{x_n\}$为单调增加．事实上，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\frac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}>0,$$

故由单调有界准则得，数列$\{x_n\}$，即数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$的极限存在.

习题 1.7

1．当$x\to 0$时，$x-x^2$与x^2-x^3相比，哪一个是高阶无穷小？

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x^3}{x-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以当$x\to 0$时，$x^2-x^3$是比$x-x^2$高阶的无穷小.

2．当$x\to 1$时，无穷小$x-1$与下列无穷小是否同阶？是否等价？

（1）x^2-1；　　（2）$2(\sqrt{x}-1)$；　　（3）$\dfrac{1}{x}-1$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq 1$，故当$x\to 1$时，$x-1$与$x^2-1$同阶但不等价.

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{2(\sqrt{x}-1)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=1$，故当$x\to 1$时，$x-1$与$2(\sqrt{x}-1)$同阶且等价.

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x(x-1)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=-1\neq 1$，故当$x\to 1$时，$x-1$与$\dfrac{1}{x}-1$同阶但不等价.

3．设当$x\to 0$时，$1-\cos x^2$与$ax\sin^n x$是等价无穷小，求常数a及正整数n.

解　当$x\to 0$时，$\sin\dfrac{x^2}{2}\sim\dfrac{x^2}{2},\sin x\sim x$．要使$1-\cos x^2\sim ax\sin^n x$（$x\to 0$），只要

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{ax\sin^n x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{ax\sin^n x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{ax\cdot x^n}=\frac{1}{2a}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^{n+1}}=1$$

即可，从而有 $\frac{1}{2a}=1, n+1=4$，即 $a=\frac{1}{2}, n=3$.

4．利用等价无穷小代换法求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^{2x}-1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\arctan(x^3)}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\ln(1+x^2)}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\frac{x+2}{x}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^m)}{\sin^n x}$（$m,n\in\mathbf{N}^+$）；

（7）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin(1-x)}{\ln x}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解　（1）当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$．因而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$.

（2）当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}, e^{2x}-1\sim 2x$．因而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{2x}=\frac{1}{4}$.

（3）当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x, \arctan(x^3)\sim x^3$．因而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{\arctan(x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x}{x^3}=1$.

（4）当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}, \ln(1+x^2)\sim x^2$．因而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x\ln(1+x^2)}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x\cdot x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

（5）令 $t=\frac{2}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$．因而 $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{x+2}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2}{t}\ln(1+t)=$ $2\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{t}=2$.

（6）$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^m)}{\sin^n x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^m}{x^n}=\lim_{x\to 0}x^{m-n}=\begin{cases}0, & m>n,\\ 1, & m=n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

（7）$$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(1-x)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln[1+(x-1)]}=-\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=-1.$$

（8）当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}, \sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{x^2}{3}, \sqrt{1+\sin x}-1\sim\frac{\sin x}{2}$.

因而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{3}\dfrac{\sin x}{2}}=-3\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2\cdot x}=-3 .$$

习题 1.8

1．研究下列函数在指定点处的连续性：

（1）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$；（2）$f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$；

（3）$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ 2x, & 0<x<1,\\ 1-x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 在 $x=0$ 及 $x=1$.

解　（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)=1, \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1$，且 $f(1)=2-1=1$，故函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

（3）尽管 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=0, \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2x=0$，但函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续；又 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2x=2$，但 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)=0$，故函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处也不连续.

2．讨论下列函数的连续性，若有间断点，指出其类型：

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；（2）$f(x)=\dfrac{x}{|x|(x+1)}$；

（3）$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|\leqslant 1,\\ x-3, & |x|>1.\end{cases}$

解　（1）函数 $f(x)$ 为初等函数，由定理 1-16，该函数在其定义区间 $(-\infty,1),(1,2),(2,+\infty)$ 内连续，且只有两个间断点 $x=1$ 及 $x=2$. 而

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2 ,$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}=\infty ,$$

故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类的可去间断点，$x=2$ 是 $f(x)$ 的第二类的无穷间断点.

（2）函数 $f(x)$ 可变形为 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}(x+1)}$，故为初等函数，由定理 1-16，该函数在其定义区间 $(-\infty,-1),(-1,0),(0,+\infty)$ 内连续，且只有间断点 $x=0$ 及 $x=-1$. 由 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{|x|(x+1)}=-\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x+1}=-1$，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{|x|(x+1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x+1}=1$ 得 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类的跳跃间断点；由 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{|x|(x+1)}=-\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$ 得 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类的无穷间断点.

（3）原函数可改写成 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-3, & x>1\text{或}x<-1\end{cases}$，显然 $f(x)$ 的间断点只有 $x=-1$ 及 $x=1$. 由 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(x-3)=-4$，但 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(1+x)=0$ 得 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类的跳跃间断点；由 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(1+x)=2$，但 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-3)=-2$ 得 $x=1$ 也是 $f(x)$ 的第一类的跳跃间断点.

3．求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求 $\lim\limits_{x\to1}f(x),\ \lim\limits_{x\to2}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$.

解 显然 $f(x)$ 是初等函数，故其连续区间即为定义区间 $(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+3}=\frac{3}{5},$$

$$\lim_{x\to-3}f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to-3}\frac{x+1}{x+3}=\infty.$$

4．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos^3 2x$；　　（2）$\lim\limits_{x\to1}\ln(x+\sqrt{\sin\pi x})$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{\sin 4x}{x}}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to0}(1-\tan x)^{\cot 2x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 （1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos^3 2x=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\ln(x+\sqrt{\sin\pi x})=\ln(1+\sqrt{\sin\pi})=\ln(1+0)=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{\sin 4x}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{x}}=2\sqrt{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{4x}}=2$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1-\tan x)^{\cot 2x}=\lim\limits_{x\to0}(1-\tan x)^{\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}}$

$$=\left[\lim_{x\to0}[1+(-\tan x)]^{\frac{1}{-\tan x}}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to0}[1+(-\tan x)]^{\frac{\tan x}{2}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+0)^0=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

(5)解法一　$\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln[1+(\cos x-1)]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

解法二　$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}$

$$=\left[\lim_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

5．求常数 a 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & x<0,\\ 2x-3, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续.

解　当 $a=0$ 时，原函数变为 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x-3, & x\geqslant 0\end{cases}$ 从而有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}0=0,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(2x-3)=-3,$$

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续；

当 $a\neq0$ 时，有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=a,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(2x-3)=-3,$$

故要使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，只要 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ 即 $a=-3$ 即可.

6．设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ k, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求常数 k.

解　显然函数 $f(x)$ 在其定义区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上是连续的，故要使该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只要其在点 $x=0$ 处连续即可，因而有

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(1+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}=[\lim_{x\to0}(1+2x^2)^{\frac{1}{2x^2}}]^2=\mathrm{e}^2=f(0)=k,$$

从而有 $k=\mathrm{e}^2$.

习题 1.9

1．证明方程$x^3-3x^2+1=0$至少有一个小于1的正根.

证 令$f(x)=x^3-3x^2+1$，则只需证明$f(x)$在开区间$(0,1)$内至少有一个零点即可.

事实上，$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$f(0)=1>0,f(1)=-1<0$，由零点定理得，函数$f(x)$在$(0,1)$内至少有一个零点.

2．证明方程 $x^5-3x^3-1=0$至少有一个介于 1 与 2 之间的实根.

证 令$f(x)=x^5-3x^3-1$，则只需证明$f(x)$在开区间$(1,2)$内至少有一个零点即可.

事实上，$f(x)$在闭区间$[1,2]$上连续，且$f(1)=-3<0,f(2)=32-24-1=7>0$，由零点定理得，函数$f(x)$在$(1,2)$内至少有一个零点.

3．证明方程$x=a\sin x+b$（$a>0,b>0$）至少有一个不超过$a+b$的正根.

证 令$f(x)=a\sin x+b-x$，则$f(x)$在闭区间$[0,a+b]$上连续，且$f(0)=b>0$，显然

$$f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1]\leqslant 0\ .$$

若$f(a+b)=0$，则$a+b$即为方程$x=a\sin x+b$的正根；若$f(a+b)<0$，则由零点定理得，函数$f(x)$在$(0,a+b)$内至少有一个零点，即方程$x=a\sin x+b$至少有一个小于$a+b$的正根.

综上，方程$x=a\sin x+b$至少有一个不超过$a+b$的正根.

4．设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：至少存在一点$\xi\in(x_1,x_3)$，使得$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$.

证 显然函数$f(x)$在闭区间$[x_1,x_3]$上也连续，由最值定理，可记

$$M=\max_{x_1\leqslant x\leqslant x_3}\{f(x)\},m=\min_{x_1\leqslant x\leqslant x_3}\{f(x)\}\ ,$$

则有

$$m=\frac{m+m+m}{3}\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\leqslant\frac{M+M+M}{3}=M\ .$$

若上述等式为严格不等号，则由介值定理，存在$\xi\in(x_1,x_3)$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\ .$$

若上述不等式中出现等号，如

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}=M\quad（或\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}=m），$$

则有 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=M$（或$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=m$），可取 $\xi=x_2\in$

(x_1, x_3)，有 $f(\xi)=f(x_2)=M=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$（或 $f(\xi)=f(x_2)=m=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$）.

总习题一

1．填空题：

（1）已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=3x-4$，则 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式是________；

（2）函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域是________；

（3）设 a,b 都是常数，若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3+2x+a}=b\neq0$，则 $a=$________，$b=$________；

（4）设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}+ax+b$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小，则常数 $a=$________，$b=$________；

（5）设当 $x\to1$ 时，$(x^2+x-2)^2\ln x$ 与 $a(x-1)^n$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________，$n=$________.

解　（1）当 $x<0$ 时，$-x>0$，由 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数可得

$$-f(x)=f(-x)=3\cdot(-x)-4=-(3x+4),$$

从而有 $f(x)=3x+4$.

（2）要使函数有意义，只要 $x^2-1>0, x+1>0$ 即 $x>1$ 即可，因而函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$.

（3）因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3+2x+a}=b\neq0$，所以一定有 $\lim\limits_{x\to1}(x^3+2x+a)=3+a=0$，即 $a=-3$，从而有 $b=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3+2x+a}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x^2+x+3)}=\dfrac{1}{5}$.

（4）由已知有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}+ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(a+1)x^2+(a+b)x+(b+1)}{x+1}\right]=0$，因而有 $a+1=0$ 且 $a+b=0$，从而解得 $a=-1, b=1$.

（5）由已知，并结合等价无穷小替换法有

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x-2)^2\ln x}{a(x-1)^n}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)^2(x-1)^2\ln[1+(x-1)]}{a(x-1)^n}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)^2(x-1)^3}{a(x-1)^n}=1,$$

因而有 $n=3$ 且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)^2}{a}=\dfrac{9}{a}=1$，从而解得 $a=9, n=3$．

2．选择题：

（1）在下列函数中，不是初等函数的是（　　）；

A．$f(x)=\dfrac{\tan x+\sec x}{\sin x}$　　B．$f(x)=|2\arcsin x+1|$

C．$f(x)=\begin{cases}2-x, & x<1,\\ x+2, & x\geqslant 1\end{cases}$　　D．$f(x)=\sqrt{-x-2}$

（2）函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,2]$，则函数 $f(x-2)$ 的定义域是（　　）；

A．$[-1,2]$　　B．$[1,2]$

C．$[-1,4]$　　D．$[1,4]$

（3）函数 $f(x)=1+2\sin x$ 的值域是（　　）；

A．$[-1,1]$　　B．$[-1,2]$

C．$[-1,3]$　　D．$[-2,3]$

（4）函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x}$ 的定义域是（　　）；

A．$[-1,0)\cup(0,1]$　　B．$[-1,1)$

C．$(-1,1]$　　D．$(-1,1)$

（5）下列命题中错误的是（　　）；

A．两个偶函数的复合函数仍是偶函数

B．两个奇函数的复合函数仍是奇函数

C．两个单调增加函数的复合函数仍是单调增加函数

D．两个单调减少函数的复合函数仍是单调减少函数

（6）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，则下列说法正确的是（　　）；

A．$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 都存在

B．$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 都不存在

C．$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 必不存在，而 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 可能存在

D．$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 可能存在，而 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 必不存在

（7）当 $x\to0$ 时，下列四个无穷小中，比其他三个更高阶的无穷小是（　　）；

A．$1-\cos x^2$　　B．$\mathrm{e}^{x^2}-1$

C．$\sqrt{1+x^2}-1$　　D．$\sin x-\tan x$

（8）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\neq0$，函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且有间断点，则必有间断点的函数是（　　）；

A．$f[\varphi(x)]$　　B．$\varphi[f(x)]$

C．$[\varphi(x)]^2$　　　　　　　　　　D．$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$

（9）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ 的连续区间是（　　）.

A．$(-\infty,-1),(1,+\infty)$　　　　　　　B．$[-2,-1),(1,2]$

C．$[-2,-1),(-1,1),(1,2]$　　　　　　D．$(-8,-1),(-1,1),(1,+\infty)$

解　（1）选 C．显然 A 和 D 都是初等函数，故只要能说明 B 是初等函数就可以了，事实上 $f(x)=|2\arcsin x+1|=\sqrt{(2\arcsin x+1)^2}$ 符合初等函数的定义.

（2）选 D．因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,2]$，故要使 $f(x-2)$ 有意义，只要 $-1\leqslant x-2\leqslant 2$ 即 $1\leqslant x\leqslant 4$，因而函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $[1,4]$.

（3）选 C．因为 $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$，所以 $1+2\cdot(-1)\leqslant 1+2\sin x\leqslant 1+2\cdot 1$ 即 $-1\leqslant f(x)\leqslant 3$，因而函数 $f(x)=1+2\sin x$ 的值域为 $[-1,3]$.

（4）选 A．要使函数有意义，只要 $1-x^2\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$ 即 $-1\leqslant x<0$ 且 $0<x\leqslant 1$ 即可，即函数的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

（5）选 D．设 $h(x)=f[g(x)]$ 是由 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成函数.

若 $g(x)$ 为偶函数，则有 $h(-x)=f[g(-x)]=f[g(x)]=h(x)$，故 A 正确；

若 $g(x)$ 和 $f(u)$ 均为奇函数，则有 $h(-x)=f[g(-x)]=f[-g(x)]=-f[g(x)]=-h(x)$，故 B 正确；

若 $g(x)$ 和 $f(u)$ 均单调增加，即当 $x_1<x_2$ 时，$g(x_1)<g(x_2)$，从而有 $h(x_1)=f[g(x_1)]<f[g(x_2)]=h(x_2)$，即 $h(x)$ 也单调增加，故 C 正确；

若 $g(x)$ 和 $f(u)$ 均单调减少，即当 $x_1<x_2$ 时，$g(x_1)>g(x_2)$，从而有 $h(x_1)=f[g(x_1)]<f[g(x_2)]=h(x_2)$，即 $h(x)$ 单调增加，故 D 错误.

（6）选 C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\{[f(x)+g(x)]-f(x)\}$ 也存在，矛盾，故 A 错误；但 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 可能存在，也可能不存在，如 $f(x)=x-x_0$，$g_1(x)=\dfrac{1}{x-x_0}$，$g_2(x)=\dfrac{1}{(x-x_0)^2}$，就有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g_1(x)]=1,\ \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g_2(x)]=\infty$，故 B、D 错误，而 C 正确.

（7）选 A．当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x^2\sim\dfrac{x^4}{2},\ \mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2,\ \sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{x^2}{2},\ \sin x-\tan x=-\tan x(1-\cos x)\sim -x\cdot\dfrac{x^2}{2}=-\dfrac{x^3}{2}$.

因而当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x^2$ 是比其他三个更高阶的无穷小.

（8）选 D．若 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 没有间断点，则根据连续函数的运算性质，$\varphi(x)=$

$f(x)\cdot\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必无间断点，故 D 正确；而 $f[\varphi(x)]$ 与 $\varphi[f(x)]$ 及 $[\varphi(x)]^2$ 都可能没有间断点，如 $f(x)=x^2,\ \varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$，则 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]=[\varphi(x)]^2\equiv 1$ 都没有间断点，故 A、B、C 都是错误的.

（9）选 B．要使函数有意义，只要 $x^2-1>0$ 且 $4-x^2\geqslant 0$，因而 $x>1$ 或 $x<-1$ 且 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 即可，故函数的连续区间即为定义区间：$[-2,-1),(1,2]$.

3．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x\arcsin x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sec x-\cos x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to \mathrm{e}}\dfrac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}$；　（4）$\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt{(x+p)(x+q)}-x]$；

（5）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x^2-x\cos x}$；　（6）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+1}\right)^{2x}$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot x}=\dfrac{1}{2}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\sin^2 x}=(\lim\limits_{x\to 0}\cos x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

（3）令 $t=x-\mathrm{e}$，则当 $x\to\mathrm{e}$ 时，$t\to 0$ 且 $x=t+\mathrm{e}$，从而有

$$\lim_{x\to \mathrm{e}}\frac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+\mathrm{e})-\ln\mathrm{e}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{\mathrm{e}}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\ln\left(1+\frac{t}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$=\ln\left[\left(\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{t}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right]=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

（4）$$\lim_{x\to +\infty}[\sqrt{(x+p)(x+q)}-x]=\lim_{x\to +\infty}\frac{(p+q)x+pq}{\sqrt{(x+p)(x+q)}+x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(p+q)+\frac{pq}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{p}{x}\right)\left(1+\frac{q}{x}\right)}+1}=\frac{p+q}{2}.$$

（5）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x^2-x\cos x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x^2}}{1-\frac{\cos x}{x}}=1$.

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-5}{2x+1}\right)^{2x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-5}{2x+1}\right)^{2x+1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-5}{2x+1}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-5}}\right]^{-5}=\mathrm{e}^{-5}.$$

4．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}, & x>0\end{cases}$（$a>0$），当常数 a,b 为何值时，

（1）$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点？

（2）$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点？

（3）$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点？

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，$f(0)=b$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$，因此

（1）要使 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点，只要 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=b$ 即可，从而有 $a=1,b=\dfrac{1}{2}$．

（2）要使 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点，只要 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ 但 $b\neq\dfrac{1}{2}$ 即可，从而有 $a=1,b\neq\dfrac{1}{2}$．

（3）要使 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点，只要 $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ 即可，从而有 $a\neq1,b$ 为任意常数．

5．求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ 的间断点，并列出间断点的类型．

解 当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1-x^{2n})}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\left(\frac{1}{x^{2n}}-1\right)}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=-x$，

当$|x|=1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1-x^{2n})}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1-1)}{1+1}=0$，

当$|x|<1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1-x^{2n})}{1+x^{2n}}=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-0}{1+0}=x$，

故函数的间断点是$x=-1$与$x=1$，且

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-x)=1,\ \lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^-}x=-1,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x=1,\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1,$$

因此$x=-1$与$x=1$均为函数$f(x)$的跳跃间断点.

6．已知三次方程$x^3-6x+2=0$有三个实根，试指出这三个根所在的区间（每个区间的长度都必须小于1）.

解　令$f(x)=x^3-6x+2$，则有$f(-3)=-7<0,\ f(-2.5)=1.375>0,\ f(0)=2>0,\ f(0.5)=-0.875<0,\ f(2)=-2<0,\ \ f(2.5)=2.625>0$．根据零点定理知，方程$x^3-6x+2=0$三个根所在的区间分别为$\left(-3,-\dfrac{5}{2}\right),\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$.