第 7 章　空间解析几何与向量代数

解析几何是用代数的方法来研究几何问题．空间解析几何是多元函数微积分的基础．在研究空间解析几何时，向量代数是一个有力的工具．

本章首先简单介绍向量的概念及向量的线性运算，然后再建立空间直角坐标系，利用坐标讨论向量的运算，并以向量为工具讨论空间解析几何的有关内容．

7.1　向量及其线性运算

7.1.1　向量的概念

在日常生活中有这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如位移、速度、加速度、力、力矩等等，这一类量叫做**向量**（或**矢量**）．

在数学上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$（如图 7.1 所示）．有时也用一个粗体字母或者用一个上面加箭头的字母来表示向量，例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{F}$ 等．需要特别说明的是，我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**．

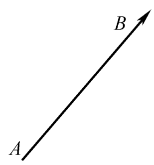

图 7.1

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的．

向量的大小叫做向量的**模**．用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量的模．特别地，模为 1 的向量称为**单位向量**．模为 0 的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$．规定零向量的方向为任意方向．

设有两个非零向量 a,b，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$．规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **的夹角**（如图 7.2 所示），记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$．如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值．特别地，当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．

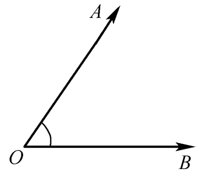

图 7.2

7.1.2　向量的线性运算

1．向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（如图 7.3 所示），那么向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．这种作出两向量之和的方法叫做向量相加的**三角形法则**．

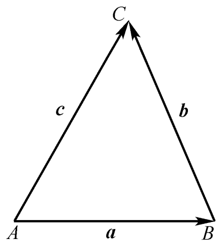

图 7.3

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$．

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$．由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$．

2．向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，并且规定：它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反，当 $\lambda=0$ 时为零向量．

向量与数的乘法符合下列运算规律：

（1）结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$．

向量的加法与数乘运算统称为**向量的线性运算**．

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，把与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{e}_a$，则 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$．

例 7.1.1　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$，这里 M 表示平行四边形对角线的交点（如图 7.4 所示）．

解　因为平行四边形的对角线互相平分，

所以
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$
即
$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA},$$

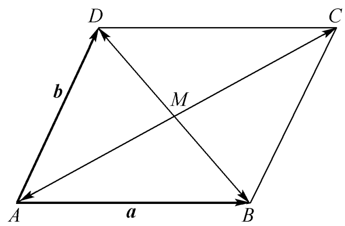

图 7.4

于是 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

由于 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

由向量与数的乘法，可以得到两向量平行的充要条件，即有

定理 7.1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明略.

定理 7.1.1 是建立数轴的理论依据．我们知道，确定一条数轴，需要给定一个点、一个方向及单位长度．由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此只需给定一个点及一个单位向量就能确定一条数轴．设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了数轴 Ox（如图 7.5 所示），则对于数轴上任一点 P，对应着一个向量 $\overrightarrow{OP}$．由于 $\overrightarrow{OP}\parallel\boldsymbol{e}$，故存在唯一的实数 x，使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应．于是

图 7.5

$$\text{点 } P\leftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}\leftrightarrow \text{实数 } x,$$

从而数轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系．据此定义实数 x 为数轴上点 P 的坐标.

习题 7.1

1．设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，给出下列等式成立的条件：

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

（3）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|$；（4）$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

2．设 $\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$．试用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表示向量 $3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$.

3．已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$．

4．设平面上的一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形．

7.2　空间直角坐标系　向量的坐标

7.2.1　空间直角坐标系

在平面解析几何中，建立了平面直角坐标系，通过平面直角坐标系，把平面上的点与有序数组对应起来．同样，为了把空间的任一点与有序数组对应起来，我们来建立空间直角坐标系．

在空间选定一点 O 作为原点，过原点 O 作三条两两垂直的数轴，分别标为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴），z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**．它们构成一个空间直角坐标系 $Oxyz$（如图 7.6 所示）．通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴是铅垂线．它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向．

三条坐标轴中每两条坐标轴所在的平面 xOy，yOz，zOx 称为**坐标面**．三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分称为一个**卦限**，共八个卦限．其中，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 部分为第Ⅰ卦限，第Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定．第Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ卦限在 xOy 面的下方，由第Ⅰ卦限正下方的第Ⅴ卦限按逆时针方向确定（如图 7.7 所示）．

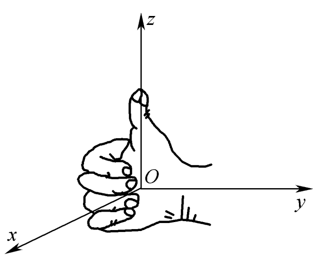

图 7.6

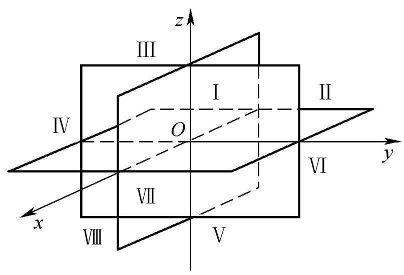

图 7.7

定义了空间直角坐标系后，来建立空间的点和有序数组之间的对应关系．设点 M 是空间中任意一点（如图 7.8 所示），过点 M 分别作垂直于 x 轴,y 轴,z 轴的平面，它们与 x 轴,y 轴,z 轴分别交于 P，Q，R 三点．设 P，Q，R 三点在三条坐标轴上的坐标分别为 x，y，z，那么点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)．反过来，给定一个有序数组 (x,y,z)，可依次在 x 轴,y 轴,z 轴上找到坐标分别为 x，y，z

的三点 P , Q , R . 过这三点分别作垂直于 x 轴, y 轴, z 轴的平面，这三个平面的交点就是有序数组所确定的唯一的点 M .

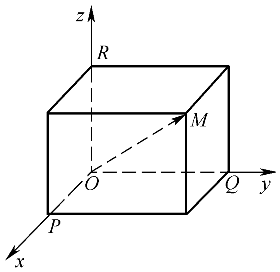

图 7.8

这样，通过空间直角坐标系，在空间中的点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应的关系，这组数 x , y , z 称为**点 M 的坐标**. 其中 x , y , z 依次称为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**. 坐标为 x , y , z 的点 M 通常记作 $M(x,y,z)$.

坐标轴和坐标面上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，在 x 轴上的点，其纵坐标 $y=0$ ，竖坐标 $z=0$ ，于是其坐标为 $(x,0,0)$. 同理， y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$ ； z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x,y,0)$ ， yOz 面上的点的坐标为 $(0,y,z)$ ， zOx 面上的点的坐标为 $(x,0,z)$.

7.2.2 向量的坐标表示

向量的运算仅用几何方法来研究有很多不便，我们还需要将向量代数化，即建立向量与有序数组之间的对应关系，通过数组之间的运算来解决向量的运算问题.

任意给定空间一向量 $\boldsymbol{r}$ ，作向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$ ，设点 M 的坐标为 (x,y,z). 过点 M 作三坐标轴的垂直平面，与 x 轴, y 轴, z 轴的交点分别为 P , Q , R （如图 7.9 所示）. 由向量的加法法则，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

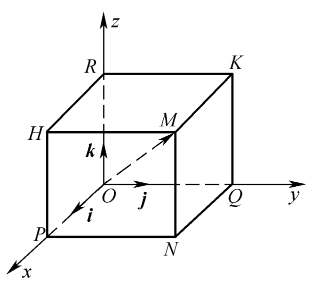

图 7.9

以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x，y，z 轴正向的单位向量，则有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}，\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}，\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}，$$

从而 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式**．$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 x 轴，y 轴，z 轴方向的**分向量**．

从上面可以看出，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 与 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ 三个分向量，从而确定了 x，y，z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x，y，z，也就确定了点 M 与向量 $\boldsymbol{r}$．于是，点 M，向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x，y，z 之间存在一一对应关系，我们称有序数 x，y，z 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$．向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的**向径**．上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标．记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$．

7.2.3　利用坐标作向量的线性运算

利用向量在直角坐标系中的坐标表达式，就可以把向量的加法、减法以及向量与数的乘法运算用坐标来表示．

设
$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)，\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)，$$
即
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}，\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}．$$
利用向量加法的交换律与结合律以及向量数乘运算的结合律与分配律，有
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}，$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}，$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}\quad（\lambda \text{ 为实数}）．$$
即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)，$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)，$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)．$$
由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可．

例 7.2.1　已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求点 M，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$．

解　如图 7.10 所示．因为
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}，\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}，$$
所以
$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})，$$
因此
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})．$$

把 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标（即点 A，点 B 的坐标）代入，得到

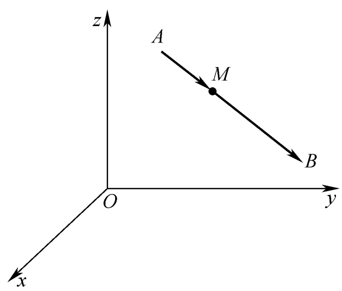

图 7.10

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right),$$

这就是点 M 的坐标.

例 7.2.1 中的点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，得线段 AB 的中点为 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

7.2.4 向量的模与方向余弦

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，如图 7.9 所示，有 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$，由勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}.$$

由于 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，得 $|OP|=|x|$，$|OQ|=|y|$，$|OR|=|z|$，

于是**向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$**.

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $B(x_2,y_2,z_2)$，则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模. 由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，即得 **$A$ 与 B 两点间的距离**

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 7.2.2 证明以三点 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14},$$

$$|M_2M_3|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6},$$

$$|M_3M_1|=\sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6},$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 7.2.3 在 y 轴上求一点，使得与 $A(1,-2,1)$ 和 $B(2,1-2)$ 两点的距离相等.

解 因为所求的点在 y 轴上，设该点的坐标为 $M(0,y,0)$，由题意得

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(1-0)^2+(-2-y)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(1-y)^2+(-2-0)^2},$$

解得 $y=\frac{1}{2}$，因此所求的点为 $M\left(0,\frac{1}{2},0\right)$.

例 7.2.4 已知两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(4,2,6)$，求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}$.

解 由于

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,2,6)-(1,2,3)=(3,0,3),$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=3\sqrt{2},$$

所以

$$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{(3,0,3)}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1).$$

思考：如何求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量.

2. 方向角与方向余弦

设非零向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α，β，γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**，称 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**，如图 7.11 所示.

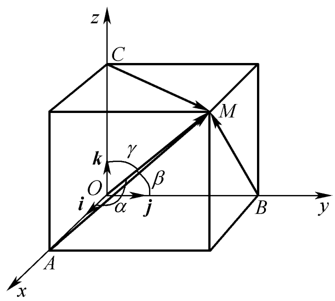

图 7.11

在 $\triangle OAM$，$\triangle OBM$，$\triangle OCM$（它们都是直角三角形）中，有

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

显然 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 这说明方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$（或方向角 α，β，γ）不是相互独立的. 又

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r,$$

即向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是一个与非零向量 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量.

例 7.2.5 已知空间两点 $M(2,2,\sqrt{2})$ 和 $N(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{MN}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $$\overrightarrow{MN}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2}),$$

$$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2;$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 7.2.6 已知三个力 $\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_3=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 作用于同一点，求合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小及方向余弦.

解 合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})+(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，

所以合力大小 $$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5.$$

其方向余弦为 $$\cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \cos\beta=\frac{4}{5},\quad \cos\gamma=0.$$

7.2.5 向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了 u 轴（如图 7.12 所示），任意给定向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面，交 u 轴于点 M'（点 M' 叫做点 M 在 u 轴上的**投影**），则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**分向量**. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$. 显然，$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\varphi$.

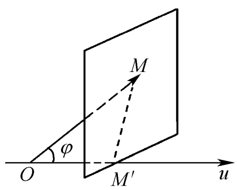

图 7.12

按照定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z 分别是向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴, y 轴, z 轴上的投影. 即 $a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$，$a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}$，$a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$，或记作 $a_x=(\boldsymbol{a})_x$，$a_y=(\boldsymbol{a})_y$，$a_z=(\boldsymbol{a})_z$.

由此可知，向量的投影具有与坐标相同的性质：

性质 7.2.1 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角；

性质 7.2.2 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；

性质 7.2.3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

例 7.2.7 一向量的终点为 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴, y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 7，求该向量的起点 A 的坐标.

解 由投影的定义可知，$\overrightarrow{AB}=(4,-4,7)$．

设 A 的坐标为 (x,y,z)，则 $\begin{cases}2-x=4,\\-1-y=-4,\\7-z=7,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-2,\\y=3,\\z=0,\end{cases}$

即点 A 的坐标为 $(-2,3,0)$．

习题 7.2

1．在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$$A(4,-2,3)\text{，}\ B(5,1,-4)\text{，}\ C(1,-3,-2)\text{，}\ D(-6,-3,1)\text{．}$$

2．指出下列各点在哪个坐标面上或坐标轴上？

$$A(1,4,0)\text{，}\ B(0,5,3)\text{，}\ C(1,0,0)\text{，}\ D(0,-1,0)\text{．}$$

3．已知 $A(-1,2,3)$, $B(5,-3,4)$, $C(2,1,6)$，试求向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ 的坐标，并验证：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$．

4．设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 及 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$．

5．求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

6．设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

7．求与 z 轴反向，模为 3 的向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

8．已知三个力 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_2=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_3=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 作用于同一点，求合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小及方向余弦.

7.3 数量积 向量积

7.3.1 两向量的数量积

如果一物体沿着某直线移动，其位移为 $\boldsymbol{s}$（如图 7.13 所示），则作用在物体上的常力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.

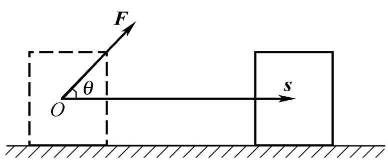

图 7.13

由此可见，功是由 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 这两个向量所唯一确定的．在物理学和力学的其他

问题中，也常常会遇到此类情况．为此，在数学中，我们把这种运算抽象成两个向量的数量积的概念．

定义 7.3.1 设有向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ，它们的夹角为 θ ，乘积 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（或称为**内积**、**点积**），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

这样，上述常力所作的功就是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

显然，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ ；当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

由数量积的定义，可以得出下列结论：

（1） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

证明 因为夹角 $\theta=0$ ，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$.

（2）非零向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证明 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ ，由 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ ， $|\boldsymbol{b}|\neq 0$ ，所以 $\cos\theta=0$ ，从而 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ ；如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ ，那么 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

由于可以认为零向量与任意向量都垂直，从而上述结论可以叙述为：向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

（3）数量积符合下列运算规律：

交换律： $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ ；

分配律： $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ ；

结合律： $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$ ，其中 λ 为实数.

例 7.3.1 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$ ， $|\boldsymbol{b}|=1$ ， $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$ ，求：

（1） $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$ ； （2） $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

解 （1）
$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})&=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=2|\boldsymbol{a}|^2-7|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}-4|\boldsymbol{b}|^2\\&=2\times 2^2-7\times 2\times 1\times\frac{1}{2}-4\times 1^2=-3 .\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}+|\boldsymbol{b}|^2=2^2+2\times 2\times 1\times\frac{1}{2}+1^2=7 ,\end{aligned}$$

故
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7} .$$

下面利用数量积的性质和运算规律来推导数量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ ， $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ ，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两垂直的单位向量，从而有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

因此得到数量积的坐标表达式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两非零向量时，有

$$\cos\theta=\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

由此进一步得到，向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

例 7.3.2　已知 $\boldsymbol{a}=(1,1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$，求

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ；（3）$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

解　（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2=-9$.

（2）因为 $\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$.

（3）由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$，得 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-3$.

例 7.3.3　设有一质点位于点 $P(1,2,-1)$，今有一方向角分别为 $60^\circ,60^\circ,45^\circ$，大小为 100 N 的力 $\boldsymbol{F}$ 作用于该质点，求质点从点 P 作直线运动至点 $M(2,5,-1+3\sqrt{2})$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功（坐标轴的单位为 m）.

解　由于力 $\boldsymbol{F}$ 的方向角分别为 $60^\circ,60^\circ,45^\circ$，大小为 100 N，所以

$$\boldsymbol{F}=100(\cos60^\circ,\cos60^\circ,\cos45^\circ)=(50,50,50\sqrt{2}).$$

又因为

$$\overrightarrow{PM}=(2-1,5-2,-1+3\sqrt{2}+1)=(1,3,3\sqrt{2}),$$

所以

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{PM}=(50,50,50\sqrt{2})\cdot(1,3,3\sqrt{2})=500\ (\mathrm{J}).$$

7.3.2　两向量的向量积

类似于两向量的数量积，两向量的向量积的概念也是从力学及物理学中的某些概念中抽象出来的.

例如，在研究物体的转动问题时，不但要考虑此物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩．设 O 为一根杠杆 L 的支点，有一力 $\boldsymbol{F}$ 作用于该杠杆上点 P 处．力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ（如图 7.14 所示），力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$，它的大小为

$$|\boldsymbol{M}|=|OQ||\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta .$$

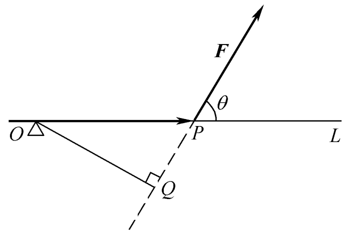

图 7.14

而力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，并且其指向与 $\overrightarrow{OP}$、$\boldsymbol{F}$ 符合右手规则，即当右手的四个手指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 时，大拇指的指向就是力矩 $\boldsymbol{M}$ 的指向．由此，在数学中我们根据这种运算抽象出两向量的向量积的概念．

定义 7.3.2　若由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的向量 $\boldsymbol{c}$ 满足下列条件：

（1）$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

（2）$\boldsymbol{c}$ 的方向既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定（如图 7.15 所示）．

则称 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**（或称**外积**、**叉积**），记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} .$$

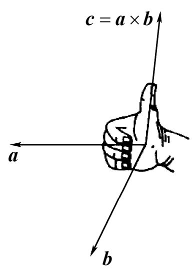

图 7.15

按此定义，上面的力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积，即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

根据向量积的定义，我们可以推得以下结论：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

证明　因为夹角 $\theta=0$，所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin 0=0$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

（2）设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两非零向量，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证明　如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，则有 $\sin\theta=0$，从而 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，

即 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$，则有 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，从而 $\sin\theta=0$，于是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0,$$

即
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

（3）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模在数值上等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

（4）向量积满足下列运算规律：

反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$；

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

例 7.3.4 求 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$.

解 根据向量积的定义，得 $|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}|=0$，

从而
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0};$$

由 $|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{j}|\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，且方向与 $\boldsymbol{k}$ 相同，从而 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$；

同理
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

下面利用向量积的性质和运算规律来推导向量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

再由例 7.3.4 可得到向量积的坐标表达式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

利用三阶行列式可将上式表示成方便记忆的形式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

例 7.3.5 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2,4)$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&3\\3&-2&4\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$.

例 7.3.6 求与 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位向量.

解 令 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均垂直. 因为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-2&4\\1&1&-2\end{vmatrix}=10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},\quad |\boldsymbol{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

故所求的单位向量为 $$\boldsymbol{e}=\pm\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}\right).$$

例 7.3.7 设三角形 ABC 的顶点分别为 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$, $C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积.

解 根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\angle A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$， $\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，故

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

因此 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

习题 7.3

1．已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$； （2）$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$； （3）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$； （4）$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

2．设力 $\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 作用在一质点上，质点由 $M_1(1,1,2)$ 沿直线移动到 $M_2(3,4,5)$，求此力所做的功（设力的单位为 N，位移的单位为 m）.

3．已知 $M_1(1,-1,2)$, $M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$，求同时与 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ 垂直的单位向量.

4．求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

5．求与向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,2)$ 平行，且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$ 的向量 $\boldsymbol{b}$.

6．试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

7．求以 $A(3,0,2)$, $B(5,2,1)$, $C(0,-1,3)$ 为顶点的三角形的面积.

8．求以 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$， $\boldsymbol{b}=(0,1,2)$ 为邻边的平行四边形的面积.

7.4 曲面及其方程

7.4.1 曲面方程的概念

在生产实践和科学实验中，常常会遇到各种曲面，例如球面、反光镜的镜面等．本节将讨论空间中常见的曲面及其方程.

在平面解析几何中，把平面曲线看作是动点的轨迹．在空间解析几何中，曲面也可看作是具有某种性质的动点的轨迹．下面给出曲面及其方程的定义.

定义 7.4.1 在空间直角坐标系中，若曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 S 上的点的坐标都不满足该方程，则方程 $F(x,y,z)=0$ 称为**曲面 S 的方程**，而曲面 S 就称为**方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形**（如图 7.16 所示）.

建立了空间曲面与其方程的联系后，我们就可以通过研究方程的解析性质来研究曲面的几何性质．空间曲面研究的两个基本问题是：

（1）已知曲面上的点所满足的几何轨迹，建立曲面的方程；

（2）已知曲面方程，研究曲面的几何形状．

例 7.4.1 建立球心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 是球面上任一点（如图 7.17 所示），根据题意有

$$|MM_0| = R,$$

因为
$$|MM_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

所以
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2. \tag{7.4.1}$$

这就是球面上点的坐标所满足的方程．而不在球面上的点的坐标都不满足这个方程，所以方程（7.4.1）就是球心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面的方程.

特别地，当球心在坐标原点时，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

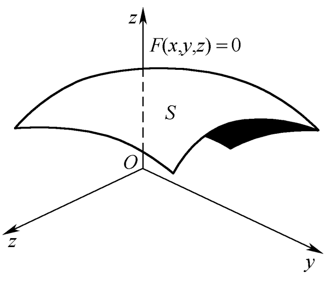

图 7.16

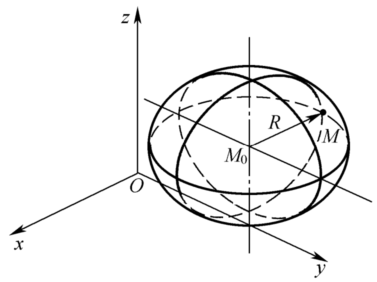

图 7.17

例 7.4.2 求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所成的曲面的方程，它表示怎样的曲面？

解 设 $M(x,y,z)$ 是所求曲面上一点，根据题意，有

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}} = \frac{1}{2},$$

化简整理得
$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{116}{9}.$$

显然，所求曲面上点的坐标都满足这个方程．而不在曲面上的点的坐标都不满足这个方程，从而此方程为所求曲面的方程．它表示以 $\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$ 为球心，以

$\dfrac{2}{3}\sqrt{29}$ 为半径的球面.

一般地，设三元二次方程 $Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0$（$A\neq 0$），这个方程的特点是缺 xy,yz,zx 各项，而且二次项系数相同. 可以通过配方研究它的图形，它的图形可能是一个球面、一个点，也可能是虚轨迹.

7.4.2　旋转曲面

定义 7.4.2　一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所生成的曲面称为**旋转曲面**. 这条平面曲线和定直线分别称为旋转曲面的**母线**和**轴**.

设在 yOz 坐标面上有一曲线 C，其方程为

$$f(y,z)=0\text{，}\tag{7.4.2}$$

把这条曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面（如图 7.18 所示），下面我们来推导这个旋转曲面的方程.

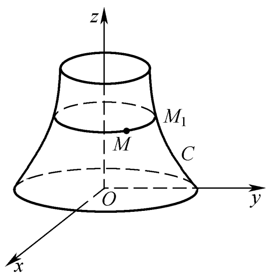

图 7.18

设 $M(x,y,z)$ 为旋转曲面上任一点，由旋转曲面的定义，设它是曲线 C 上点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转过程中的某个位置，于是 $z=z_1$，点 M 到 z 轴的距离与 M_1 到 z 轴的距离相等，即 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$. 由于

$$f(y_1,z_1)=0\text{，}$$

则有

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0\text{.}\tag{7.4.3}$$

这就是所求旋转曲面的方程.

由此可见，在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得到曲线 C 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的方程.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0\text{.}\tag{7.4.4}$$

xOy 坐标面上的曲线绕 x 轴或 y 轴旋转，zOx 坐标面上的曲线绕 x 轴或 z 轴旋转，都可以用类似的方法进行讨论.

例 7.4.3 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫**圆锥面**. 两直线的交点叫做圆锥面的**顶点**，两直线的夹角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 叫做圆锥面的**半顶角**. 试建立顶点在坐标原点 O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面（如图 7.19 所示）的方程.

解 在 yOz 坐标面上，直线 L 的方程为

$$z=y\cot\alpha\ . \tag{7.4.5}$$

因为旋转轴是 z 轴，所以只要把方程（7.4.5）中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得到圆锥面的方程

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha\ ,$$

或

$$z^2=a^2(x^2+y^2)\text{，其中}\quad a=\cot\alpha\ . \tag{7.4.6}$$

例 7.4.4 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z=ax^2$（$a>0$）绕 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$z=a(x^2+y^2)\ , \tag{7.4.7}$$

这个旋转曲面称为**旋转抛物面**（如图 7.20 所示）.

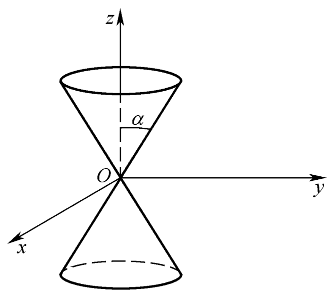

图 7.19

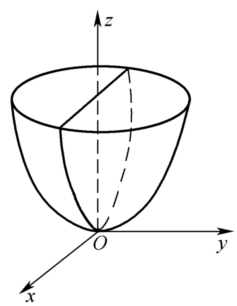

图 7.20

例 7.4.5 将 xOz 坐标面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 z 轴或 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ ,$$

这个旋转曲面称为**旋转单叶双曲面**（如图 7.21 所示）.

绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1,$$

这个旋转曲面称为**旋转双叶双曲面**（如图 7.22 所示）.

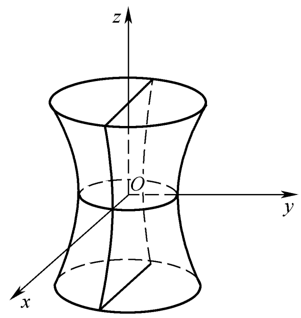

图 7.21

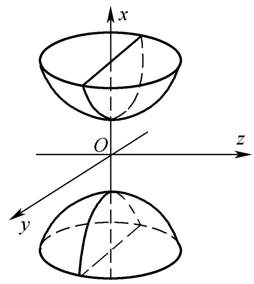

图 7.22

7.4.3 柱面

考察方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间中表示怎样的曲面.

在 xOy 面上，它表示圆心在原点 O，半径为 R 的圆．在空间直角坐标系中，由于方程不含竖坐标 z．因此，对空间一点 (x,y,z)，不论其竖坐标 z 是什么，只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 能满足方程，这一点就在此曲面上．即凡是通过 xOy 面内圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x,y,0)$，且平行于 z 轴的直线 L 都在该曲面上．因此，该曲面可以看作是平行于 z 轴的直线 L 沿着 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的，称该曲面为**圆柱面**（如图 7.23 所示）.

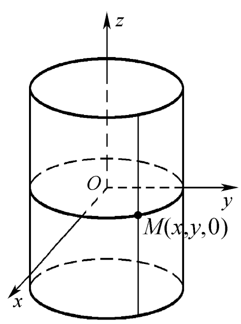

图 7.23

定义 7.4.3 平行于定直线的直线 L 沿曲线 C 平行移动所形成的轨迹称为**柱面**．曲线 C 称为柱面的**准线**，直线 L 称为柱面的**母线**.

这里只讨论母线平行于坐标轴的柱面.

一般地，在空间解析几何中，不含 z 而仅含 x，y 的方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平

行于 z 轴的柱面，xOy 面上的曲线 $F(x,y)=0$ 是这个柱面的一条准线.

同理，不含 y 而仅含 x , z 的方程 $G(x,z)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面；不含 x 而仅含 y , z 的方程 $H(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面.

例如，方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴，准线为 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$ 的柱面，这个柱面称为**抛物柱面**（如图 7.24 所示）.

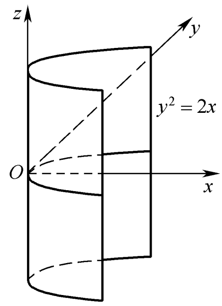

图 7.24

又如，方程 $y-z=0$ 表示母线平行于 x 轴，准线为 yOz 面上的直线 $y-z=0$ ，这个柱面是一个平面（如图 7.25 所示）.

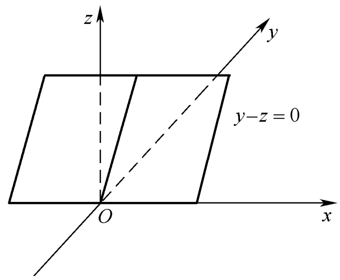

图 7.25

7.4.4　二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似，我们把三元二次方程所表示的曲面称为**二次曲面**．把三元一次方程所表示的曲面称为**一次曲面**，也就是平面.

二次曲面有九种，适当选取空间直角坐标系，可得它们的标准方程如下：

（1）**椭圆锥面**　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$（如图 7.26 所示）.

（2）**椭球面**　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（如图 7.27 所示）.

特别地，当 $a=b=c=R$ 时，方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ ，它是球心在坐标原点的球面方程.

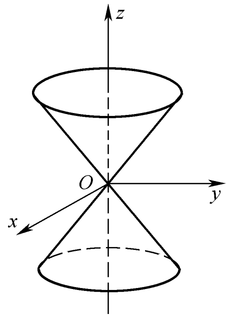

图 7.26

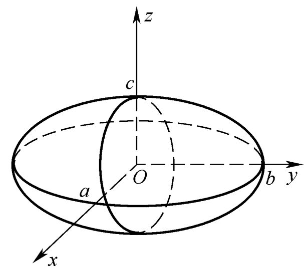

图 7.27

（3）**单叶双曲面**　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$（如图 7.28 所示）.

（4）**双叶双曲面**　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$（如图 7.29 所示）.

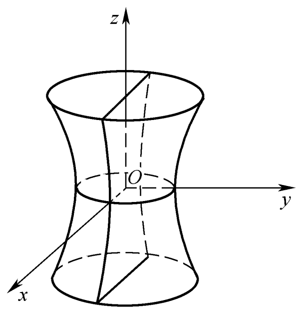

图 7.28

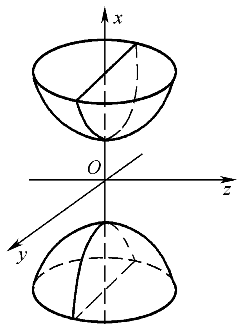

图 7.29

（5）**椭圆抛物面**　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$（如图 7.30 所示）.

（6）**双曲抛物面（马鞍面）**$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$（如图 7.31 所示）.

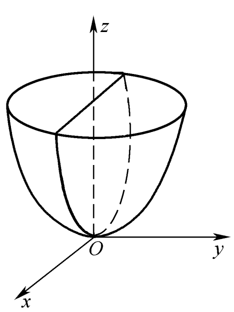

图 7.30

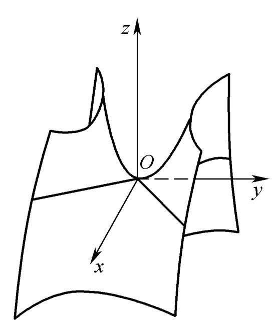

图 7.31

（7）**椭圆柱面**　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　（如图 7.32 所示）.

（8）**双曲柱面**　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　（如图 7.33 所示）.

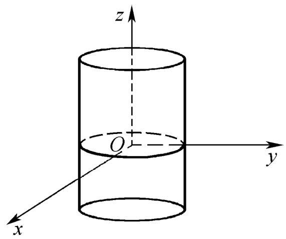

图 7.32

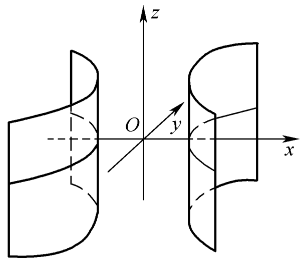

图 7.33

（9）**抛物柱面**　$y^2=ax$（如图 7.24 所示）.

习题 7.4

1．求以点 $(3,-2,5)$ 为球心，半径为 3 的球面方程.

2．方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示什么曲面？

3．一动点与两定点 $(1,2,3)$ 和 $(2,-1,4)$ 等距离，求该动点的轨迹方程.

4．将 xOz 坐标面上的抛物线 $z=4x^2$ 绕 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

5．将 xOy 坐标面上的直线 $y=2x$ 绕 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

6．指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形：

（1）$y=0$；　　（2）$y=2x+1$；

（3）$x^2+y^2=9$；　　（4）$x^2-y^2=4$.

7．说明下列旋转曲面是怎样形成的：

（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$；　　（2）$x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$；

（3）$x^2-y^2-z^2=1$.

8．画出下列方程所表示的曲面：

（1）$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$；　　（2）$y^2-z=0$；

（3）$\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

7.5 空间曲线及其方程

7.5.1 空间曲线的一般方程

任何空间曲线都可以看作空间两曲面的交线．设

$$F(x,y,z)=0 \text{ 和 } G(x,y,z)=0$$

是两个曲面的方程，它们的交线为 C（如图 7.34 所示）．因为曲线 C 上任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程，所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{7.5.1}$$

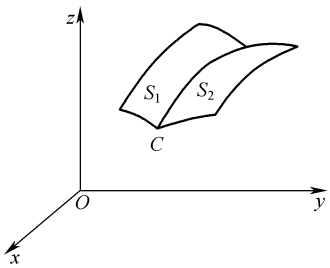

图 7.34

反之，如果点 M 不在曲线 C 上，那么它不可能同时在两个曲面上，所以它的坐标不满足方程组（7.5.1）．因此，曲线 C 可以用方程组（7.5.1）来表示．方程组（7.5.1）叫做**空间曲线 C 的一般方程**．

例 7.5.1 方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ z=1 \end{cases}$$

表示怎样的曲线？

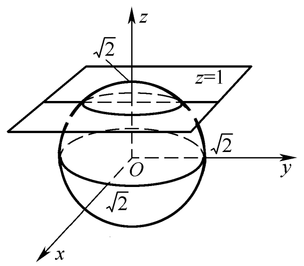

图 7.35

解 方程组中第一个方程表示球心在原点 O，半径为 $\sqrt{2}$ 的球面；第二个方程表示平面 $z=1$．方程组就表示上述球面与平面的交线，如图 7.35 所示．

例 7.5.2 方程组

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

第7章 空间解析几何与向量代数

表示怎样的曲线？

解 方程组中的第一个方程表示球心在原点 O，半径为 a 的上半球面；第二个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面，其准线是 xOy 面上的圆，圆心在点 $\left(\frac{a}{2},0\right)$，半径为 $\frac{a}{2}$．方程组就表示上半球面与圆柱面的交线，如图 7.36 所示.

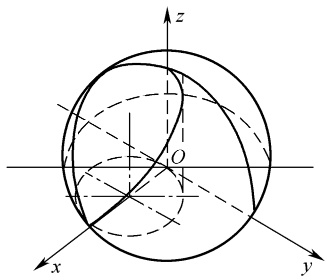

图 7.36

7.5.2 空间曲线的参数方程

在平面解析几何中，平面曲线可以用参数方程表示．同样，在空间直角坐标系中，空间曲线也可以用参数方程来表示，即把曲线上的点的直角坐标 x , y , z 分别表示为参数 t 的函数，其一般形式是

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{7.5.2}$$

这个方程组称为**空间曲线的参数方程**．当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1)，随着参数 t 的变化就可得到曲线上全部的点.

例 7.5.3 若空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω， v 都是常数），那么点 M 的运动轨迹叫做**螺旋线**．试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数．设当 $t = 0$ 时，动点位于 x 轴上的一点 $A(a,0,0)$. 经过时间 t，动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$，如图 7.37 所示．记点 M 在 xOy 面上的投影为点 M'，则点 M' 的坐标为 $(x, y, 0)$ ．由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，所以经过时间 t， $\angle AOM' = \omega t$ ．从而

$$x = |OM'| \cos \angle AOM' = a \cos \omega t ,$$

$$y = |OM'| \sin \angle AOM' = a \sin \omega t ,$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，所以

$$z = M'M = vt .$$

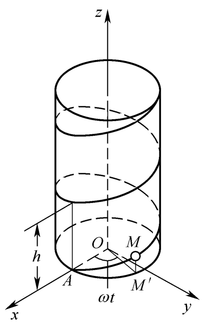

图 7.37

因此，螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

螺旋线是生产实践中常用的曲线．例如，螺丝钉的外缘曲线就是螺旋线．如果取 $\theta = \omega t$ 作为参数，便有 $\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = k\theta. \end{cases}$ 其中 $k = \dfrac{v}{\omega}$．

螺旋线有个重要性质：当 $\theta = 2\pi$ 时，$z = 2\pi k$，这表示点 M 从点 A 开始绕 z 轴运动一周后在 z 轴方向上所移动的距离，这个距离 $h = 2\pi k$ 称为**螺距**．

7.5.3　空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{7.5.3}$$

定义 7.5.1　以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 C 关于 xOy 面的**投影柱面**．投影柱面与 xOy 面的交线称为空间曲线 C 在 xOy 面上的**投影曲线**，简称**投影**．

现在来研究投影柱面和投影的求法．

由方程组（7.5.3）消去变量 z 后所得的方程为

$$H(x, y) = 0 . \tag{7.5.4}$$

当 x , y 和 z 满足方程组（7.5.3）时，前两个数 x , y 必定满足方程（7.5.4），这说明曲线 C 上所有点都在由方程（7.5.4）所表示的曲面上．从而方程（7.5.4）表示包含曲线 C，且母线平行于 z 轴的柱面，故方程（7.5.4）一定包含曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面．而方程组 $\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 所表示的曲线必定包含着曲线 C 在 xOy 面上

的投影.

类似地，从方程组（7.5.3）中消去 x 或 y，再分别和 $x=0$ 或 $y=0$ 联立，就可以分别得到包含曲线 C 在 yOz 面或 zOx 面上的投影曲线的方程：

$$\begin{cases} R(y,z)=0, \\ x=0, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} T(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例 7.5.4　求曲线 $C\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影方程.

解　从已知方程组中消去变量 z 后，得 $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$，

于是 $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0 \end{cases}$ 为曲线 C 在 xOy 面上的投影.

由于曲线 C 在平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 上，故在 yOz 面上的投影为线段：

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ x=0, \end{cases} \quad |y|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

同理，在 zOx 面上的投影也为线段：

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ y=0, \end{cases} \quad |x|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

在重积分和曲面积分的计算中，往往需要确定一个立体或曲面在坐标面上的投影，这时需要利用投影柱面和投影曲线.

例 7.5.5　设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和圆锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成（如图 7.38 所示）. 求它在 xOy 面上的投影.

解　上半球面和圆锥面的交线为

$$C:\ \begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}. \end{cases}$$

从这个方程组中消去 z 得投影柱面的方程 $x^2+y^2=1$. 从而交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0, \end{cases}$ 这是一个 xOy 面上的单位圆. 于是所求立体在 xOy 面上的投影，就是该圆在 xOy 面上所围的部分：$x^2+y^2\leqslant1$.

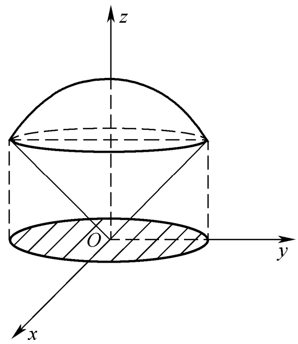

图 7.38

习题 7.5

1．下列方程组在平面解析几何和空间解析几何中各表示什么图形：

（1）$\begin{cases} y = 5x+3, \\ y = 2x-1; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4} = 1, \\ x = 3. \end{cases}$

2．画出下列曲线在第一卦限内的图形：

（1）$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \\ x-y = 0; \end{cases}$　　（3）$\begin{cases} x^2+y^2 = 1, \\ x^2+z^2 = 1. \end{cases}$

3．求通过曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2 = 16, \\ x^2-y^2+z^2 = 0 \end{cases}$且母线分别平行于 x 轴及 y 轴的柱面方程.

4．求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 9, \\ x+z = 1 \end{cases}$在 xOy 面上的投影方程.

5．将曲线的一般方程$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4, \\ y = x \end{cases}$化为参数方程.

6．求旋转抛物面 $z = x^2+y^2$（$0 \leqslant z \leqslant 4$）在三个坐标面上的投影.

7．求两个椭圆抛物面 $z = x^2+2y^2$ 与 $z = 6-2x^2-y^2$ 所围成的立体在 xOy 坐标面的投影区域.

7.6　平面及其方程

平面是空间中最简单的曲面．本节将以向量为工具，在空间直角坐标系中建立平面的方程，并进一步讨论有关平面的一些基本性质.

7.6.1 平面的点法式方程

如果一个平面通过某定点且与一非零向量垂直，则这个平面的位置就可以完全确定. 通常把垂直于平面的非零向量就叫做该**平面的法线向量**，简称**法向量**. 显然，平面上的任一向量都与该平面的法线向量垂直.

设平面$\prod$过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，法线向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，下面建立平面$\prod$的方程.

设$M(x,y,z)$是平面$\prod$上的任一点（如图 7.39 所示），则有$\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$，即$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 因为$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，所以有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 . \tag{7.6.1}$$

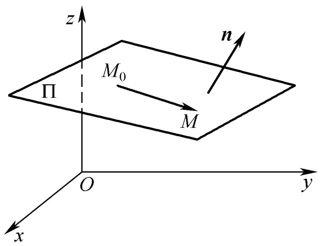

图 7.39

由点M的任意性可知，平面$\prod$上任一点都满足方程（7.6.1）. 反之，如果点M不在平面$\prod$上，那么向量$\overrightarrow{M_0M}$与法线向量$\boldsymbol{n}$不垂直，从而$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$，即不在平面$\prod$上的点坐标都不满足方程（7.6.1）. 因此，方程（7.6.1）称为**平面的点法式方程**，而平面$\prod$就是方程（7.6.1）的图形.

例 7.6.1 求过点$(2,4,-3)$且以$\boldsymbol{n}=(2,3,-5)$为法线向量的平面的方程.

解 由平面的点法式方程（7.6.1），所求平面的方程为

$$2(x-2)+3(y-4)-5(z+3)=0 ,$$

即

$$2x+3y-5z-31=0 .$$

例 7.6.2 求过三点$M_1(1,1,2)$，$M_2(3,2,3)$，$M_3(2,0,3)$的平面方程.

解 先求平面的法线向量$\boldsymbol{n}$. 向量$\boldsymbol{n}$与向量$\overrightarrow{M_1M_2}=(2,1,1)$，$\overrightarrow{M_1M_3}=(1,-1,1)$都垂直，所以取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k} ,$$

根据平面的点法式方程（7.6.1），所求平面的方程为

$$2(x-1)-(y-1)-3(z-2)=0 ,$$

即

$$2x-y-3z+5=0 .$$

7.6.2　平面的一般式方程

由于平面的点法式方程（7.6.1）是关于 x，y，z 的一次方程，而任一平面都可以用它上面的一点及它的法线向量来确定，所以任一平面都可以用三元一次方程来表示.

反过来，设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0\ . \tag{7.6.2}$$

任取满足该方程的一组数 x_0, y_0, z_0，即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\ , \tag{7.6.3}$$

将上述两式相减，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ . \tag{7.6.4}$$

由此可见，方程（7.6.4）是通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法线向量的平面方程．由于方程（7.6.4）和方程（7.6.2）是同解方程，所以，任一三元一次方程（7.6.2）的图形总是一个平面，方程（7.6.2）称为**平面的一般方程**．其中，x, y, z 的系数就是该平面法线向量的坐标，即 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

平面的一般方程的几种特殊情形：

（1）若 $D=0$，则方程为 $Ax+By+Cz=0$，该平面通过坐标原点.

（2）若 $A=0$，则方程为 $By+Cz+D=0$，法线向量为 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴，方程表示一个平行于 x 轴的平面.

同理，方程 $Ax+Cz+D=0$ 和 $Ax+By+D=0$ 分别表示一个平行于 y 轴和 z 轴的平面.

（3）若 $A=B=0$，则方程为 $Cz+D=0$，法线向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,C)$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴，方程表示一个平行于 xOy 面的平面.

同理，方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于 yOz 面和 xOz 面的平面.

例 7.6.3　求通过 z 轴和点 $(2,-1,2)$ 的平面的方程.

解　设所求平面的一般方程为　$Ax+By+Cz+D=0$.

由于平面通过 z 轴，则 $C=0$，$D=0$．从而所求平面的方程为 $Ax+By=0$.

又平面通过点 $(2,-1,2)$，代入有 $2A-B=0$，即 $B=2A$.

代入方程便得到所求平面的方程

$$x+2y=0\ .$$

例 7.6.4　设一平面与 x, y, z 轴的交点依次为 $P_1(a,0,0), P_2(0,b,0), P_3(0,0,c)$ 三点（如图 7.40 所示），求这平面的方程.

解　设所求平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0\ .$$

代入点 $P_1(a,0,0), P_2(0,b,0), P_3(0,0,c)$ 三点坐标，有

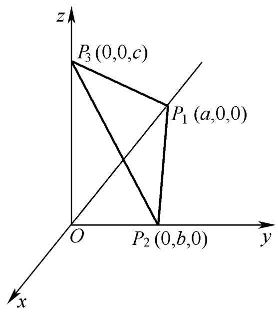

图 7.40

$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

得 $A = -\dfrac{D}{a}$， $B = -\dfrac{D}{b}$， $C = -\dfrac{D}{c}$.

代入所设平面的方程中，得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 . \qquad (7.6.5)$$

方程（7.6.5）叫做**平面的截距式方程**， a , b , c 分别叫做平面在 x , y , z 轴上的**截距**.

7.6.3 两平面的夹角

两平面法线向量的夹角（通常指锐角）称为**两平面的夹角**.

设有两平面 Π_1 和 Π_2 ：

Π_1： $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ， $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ；

Π_2： $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ， $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ，

则平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 应是 $(\boldsymbol{n}_1 \hat{,} \boldsymbol{n}_2)$ 和 $\pi - (\boldsymbol{n}_1 \hat{,} \boldsymbol{n}_2)$ 两者中的锐角(如图 7.41 所示)，因此

$$\cos\theta = \left|\cos(\boldsymbol{n}_1 \hat{,} \boldsymbol{n}_2)\right| .$$

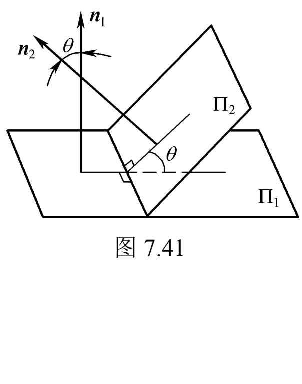

图 7.41

按照两向量夹角的余弦公式，有

$$\cos\theta=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

根据两向量垂直和平行的充要条件，可以得到：

（1）$\Pi_1\perp\Pi_2$ 的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

（2）$\Pi_1 /\!/ \Pi_2$ 的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

（3）Π_1 和 Π_2 重合的充要条件 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

例 7.6.5 判断下列各组中两平面的位置关系：

（1）Π_1： $x-2y+z+2=0$，Π_2： $y+3z-1=0$；

（2）Π_1： $3x-y+2z-1=0$，Π_2： $6x-2y+4z-1=0$.

解 （1）两平面的法线向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-2,1)$，$\boldsymbol{n}_2=(0,1,3)$，

因为
$$\cos\theta=\frac{\left|1\times0+(-2)\times1+1\times3\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{60}},$$
从而，两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

（2）两平面的法线向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(3,-1,2)$，$\boldsymbol{n}_2=(6,-2,4)$.

因为 $\dfrac{3}{6}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{2}{4}$，所以 $\Pi_1 /\!/ \Pi_2$. 又存在点 $M(0,-1,0)\in\Pi_1$，但 $M(0,-1,0)\notin\Pi_2$，故这两平面平行但不重合.

例 7.6.6 求过点 $M(3,1,2)$，且与平面 $2x-y+3z-1=0$ 平行的平面方程.

解 设所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}$，平面 $2x-y+3z-1=0$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n}_1$，则 $\boldsymbol{n} /\!/ \boldsymbol{n}_1$，取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1=(2,-1,3)$，由平面的点法式方程，可得所求平面的方程为
$$2(x-3)-(y-1)+3(z-2)=0,$$
即
$$2x-y+3z-11=0.$$

例 7.6.7 设平面过原点 O 及点 $P(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z-8=0$ 垂直，求此平面的方程.

解 设所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}$，平面 $4x-y+2z-8=0$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n}_1$，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OP}=(6,-3,2)$，且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1=(4,-1,2)$，从而

可取
$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\6&-3&2\\4&-1&2\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}=-2(2,2,-3).$$

故所求平面的方程为
$$2(x-0)+2(y-0)-3(z-0)=0,$$
即
$$2x+2y-3z=0.$$

例 7.6.8 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到这平面的距离（如图 7.42）.

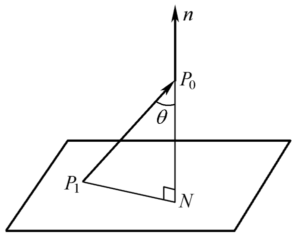

图 7.42

解 在平面上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，作向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 及法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.
易见，点 P_0 到这平面的距离 d 等于 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在法线向量 $\boldsymbol{n}$ 上投影的绝对值，即

$$d=\left|\mathrm{Prj}_n\overrightarrow{P_1P_0}\right|,$$

其中 $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$.
由投影的计算公式，得

$$\begin{aligned}d=\left|\mathrm{Prj}_n\overrightarrow{P_1P_0}\right|&=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}\\&=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\end{aligned}$$

由于 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ ，所以得到

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{7.6.6}$$

公式（7.6.6）称为**点到平面的距离公式**.

习题 7.6

1．指出下列平面的位置特点：
（1）$x=2$ ； （2）$5y-2=0$ ； （3）$4x-3y-6=0$ ； （4）$3x+5y-z=0$.
2．求过三点 $M_1(2,-1,4)$, $M_2(-1,3,-2)$, $M_3(0,2,3)$ 的平面的方程.
3．求过点 $(2,1,0)$ 且与平面 $2x+3y-5z-5=0$ 平行的平面方程.
4．求过点 $(-2,3,0)$ ，且与两平面 $x+2y+3z-2=0$ 和 $6x-y+5z+2=0$ 垂直的平面方程.
5．分别按下列条件求平面方程：

（1）平行于 yOz 面且经过点 $(1,2,3)$；

（2）通过 y 轴和点 $(3,2,-1)$；

（3）平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$.

6．一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，求该平面的方程.

7．确定 k 的值，使平面 $x+ky-2z-9=0$ 符合下列条件：

（1）与平面 $2x+4y+3z-3=0$ 垂直；

（2）与平面 $3x-7y-6z-1=0$ 平行；

（3）在 y 轴上的截距为 -3 .

8．求点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.

7.7　空间直线及其方程

7.7.1　空间直线的一般方程

空间直线 L 可看作两个相交平面的交线（如图 7.43 所示）.

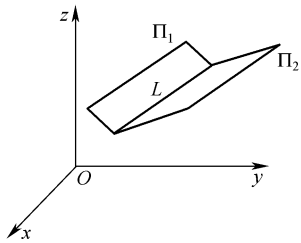

图 7.43

设两个相交平面的方程分别为

$$\Pi_1：\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0，$$

$$\Pi_2：\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 .$$

那么，直线 L 上任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程，即应满足方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{7.7.1}$$

反过来，如果一个点不在直线 L 上，那么它不可能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上，所以它的坐标不满足方程组（7.7.1）. 因此，直线 L 可以用方程组（7.7.1）来表示. 方程组（7.7.1）称为**空间直线的一般方程**.

通过空间一条直线的平面有无限多个，只要在这无限多个平面中任取两个，把它们的方程联立起来，都可作为空间直线 L 的方程.

7.7.2 平面束

过同一直线的所有平面构成一个**平面束**．设空间直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

则方程

$$\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0 \qquad (7.7.2)$$

称为过直线 L 的平面束方程，其中 λ 为参数，系数 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例．

需要注意的是，上述平面束（7.7.2）包含了除平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 之外的过直线 L 的所有平面．

例 7.7.1 过直线 L：$\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ 作平面 Π，使它垂直于平面 $x+2y+z=0$，求平面 Π 的方程．

解 设过直线 L 的平面束方程为

$$\left(x+2y-z-6\right)+\lambda\left(x-2y+z\right)=0,$$

即

$$\left(1+\lambda\right)x+2\left(1-\lambda\right)y+\left(\lambda-1\right)z-6=0.$$

所求平面与已知平面 $x+2y+z=0$ 垂直，即两平面的法线向量垂直，

从而

$$1\cdot\left(1+\lambda\right)+4\left(1-\lambda\right)+\left(\lambda-1\right)=0,$$

解得 $\lambda=2$，故所求平面的方程为

$$3x-2y+z-6=0.$$

容易验证，平面 $x-2y+z=0$ 不是所求平面．

7.7.3 空间直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量平行于一条已知直线，这个向量就叫做这条直线的**方向向量**．

由于过空间一点有且仅有一条直线平行于已知直线，所以当直线 L 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一个方向向量 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$ 为已知时，直线 L 的位置就完全确定了．下面来建立这条直线的方程．

设点 $M(x, y, z)$ 是直线 L 上任一点，那么向量 $\overrightarrow{M_0M} \,/\!/\, \boldsymbol{s}$（如图 7.44 所示），所以两向量的坐标对应成比例．由于 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$，$\boldsymbol{s}=(m, n, p)$，从而有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (7.7.3)$$

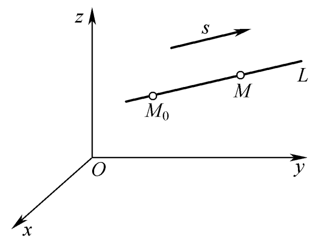

图 7.44

如果点 M 不在直线 L 上，那么 $\overrightarrow{M_0M}$ 就不可能与 $\boldsymbol{s}$ 平行，从而点 M 的坐标不满足方程（7.7.3），所以方程（7.7.3）就是直线 L 的方程，称它为直线 L 的**对称式方程**或**点向式方程**，m,n,p 称为直线 L 的一组**方向数**.

注意，因为 $\boldsymbol{s}$ 是非零向量，它的方向数 m,n,p 不会同时为零，但有可能其中一个或两个为零的情形．例如，当 $\boldsymbol{s}$ 垂直于 x 轴时，它在 x 轴上的投影 $m=0$，此时为了保持方程的对称形式，我们仍写成 $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

但这时上式应理解为 $\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}. \end{cases}$

当 m,n,p 中有两个为零时，例如 $m=n=0$，方程（7.7.3）应理解为 $\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$

由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程．如设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t\ ,$$

则

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{7.7.4}$$

方程组（7.7.4）称为直线的**参数方程**.

例 7.7.2 求过两点 $M_1(2,-1,4)$ 和 $M_2(2,3,-2)$ 的直线方程.

解 所求直线的方向向量可取为

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(0,4,-6)=2(0,2,-3)\,/\!/\,(0,2,-3)\ .$$

故所求的直线方程为

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-3}\ .$$

例 7.7.3 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x+y+z-4=0. \end{cases} \tag{7.7.5}$$

解　先找出这条直线上的一点 (x_0, y_0, z_0)．取 $x_0=1$，代入方程组（7.7.5），得

$$\begin{cases} -y+z=0, \\ y+z=2. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $y_0=1$，$z_0=1$，即得直线上的一点 $(1,1,1)$．

再求出这条直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$．因为两平面的交线与这两平面的法线向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$ 都垂直，所以可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}=(-2,1,3).$$

因此，所给直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}.$$

令

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}=t,$$

得所给直线的参数方程

$$\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1+t, \\ z=1+3t. \end{cases}$$

例 7.7.4　求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解　所给直线的参数方程为 $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3+t, \\ z=4+2t, \end{cases}$ 代入平面的方程中，得

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$$

解上述方程，得 $t=-1$．把 t 代入直线的参数方程，得交点坐标 $(1,2,2)$．

7.7.4　两直线的夹角

两直线的方向向量夹角（通常指锐角）称为**两直线的夹角**.

设 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ 分别是直线 L_1, L_2 的方向向量，则直线 L_1, L_2 的夹角 θ 应是 $(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})$ 和 $\pi-(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})$ 两者中的锐角，因此

$$\cos\theta=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})\right|.$$

按照两向量夹角的余弦公式，有

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.\tag{7.7.6}$$

从两向量垂直和平行的充要条件，即可推出：

（1）$L_1\perp L_2$ 的充要条件是 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

（2）$L_1 /\!/ L_2$ 的充要条件是 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

例 7.7.5 求直线 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 和直线 L_2：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 的夹角.

解 直线 L_1,L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(2,-2,-1)$，$\boldsymbol{s}_2=(1,-4,1)$. 设直线 L_1 和 L_2 的夹角为 θ，则由公式（7.7.6）可得

$$\cos\theta=\frac{|2\times1+(-2)\times(-4)+(-1)\times1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

7.7.5 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 称为**直线与平面的夹角**（如图 7.45 所示）. 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

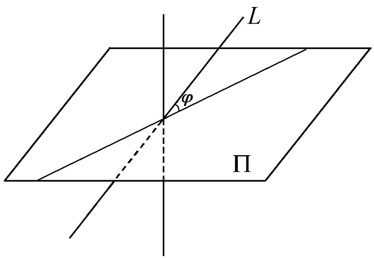

图 7.45

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，直线 L 与平面 Π 的夹角为 φ，则 $\varphi=\left|\dfrac{\pi}{2}-(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})\right|$，因此 $\sin\varphi=\left|\cos\varphi(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})\right|$. 按照两向量夹角的余弦公式，有

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ . \tag{7.7.7}$$

从而得到：

（1）$L \perp \prod$ 的充要条件是 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

（2）$L \parallel \prod$ 的充要条件是 $Am+Bn+Cp=0$.

例 7.7.6 设直线 L： $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$，平面 $\prod$： $x-y-z+1=0$，求直线 L 与平面 $\prod$ 的夹角.

解 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(1,2,-1)$，平面 $\prod$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$，由公式（7.7.7）可得

$$\sin\varphi = \frac{|1\times 1+2\times(-1)+(-1)\times(-1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=0\ ,$$

故所求的夹角为 $$\varphi = 0\ .$$

例 7.7.7 求点 $P(2,1,3)$ 到直线 L： $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 的距离.

解 先过点 $P(2,1,3)$ 作一平面与直线 L 垂直，这平面的方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0\ . \tag{7.7.8}$$

再求直线 L 和这平面的交点 Q，即垂足.

直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=1+2t, \\ z=-t. \end{cases} \tag{7.7.9}$$

把（7.7.9）代入（7.7.8）式中，得 $t=\dfrac{3}{7}$，从而求得交点为 $Q\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$.

从而，点 $P(2,1,3)$ 到直线 L 的距离为 $d=|PQ|=\dfrac{6}{7}\sqrt{21}$.

习题 7.7

1．求过两点 $M(2,3,0)$ 和 $N(-1,1,2)$ 的直线方程.

2．求过点 $(2,-1,4)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 的直线方程.

3．用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

4．求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

5．求直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 的夹角的余弦.

6．求过点 $(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z-3=0$ 和 $2x-y-5z-1=0$ 平行的直线方程.

7．判断下列各组中的直线和平面间的位置关系：

（1）$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+4}{7}=\dfrac{z}{-3}$ 和 $4x-2y-2z-3=0$；

（2）$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ 和 $3x-2y+z-8=0$；

（3）$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-4}$ 和 $x+y+z-3=0$.

8．求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

复习题 7

1．已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

2．设△ABC 的三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，三边中点依次为 D,E,F，证明 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$.

3．已知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，求 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(4\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$.

4．已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{2\pi}{3}$，问：系数 λ 为何值时，向量 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直？

5．将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

6．求过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$ 且垂直于平面 $3x-y+2z+17=0$ 的平面方程.

7. 求过点 $(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

8．求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

数学家简介——笛卡尔

勒奈·笛卡尔（Rene Descartes），1596 年 3 月 31 日生于法国都兰城．笛卡尔是伟大的哲学家、物理学家、数学家、生理学家，解析几何的创始人．笛卡尔是欧洲近代资产阶级哲学的奠基人之一，黑格尔称他为“现代哲学之父”．他自成体系，熔唯物主义与唯心主义于一炉，在哲学史上产生了深远的影响．同时，他又是一位勇于探索的科学家，他所建立的解析几何在数学史上具有划时代的意义．

笛卡尔最杰出的成就是在数学发展上创立了解析几何学．在笛卡尔时代，代数还是一个比较新的学科，几何学的思维还在数学家的头脑中占有统治地位．笛卡尔致力于代数和几何联系起来的研究，于 1637 年，在创立了坐标系后，成功地创立了解析几何学．他的这一成就为微积分的创立奠定了基础．解析几何直到现在仍是重要的数学方法之一．笛卡尔不仅提出了解析几何学的主要思想方法，还指明了其发展方向．他在《几何学》中，将逻辑、几何、代数方法结合起来，通过讨论作图问题，勾勒出解析几何的新方法．从此，数和形就走到了一起，数轴是数和形的第一次接触．解析几何的创立是数学史上一次划时代的转折．而平面直角坐标系的建立正是解析几何得以创立的基础．直角坐标系的创建，在代数和几何上架起了一座桥梁，它使几何概念可以用代数形式来表示，几何图形也可以用代数形式来表示，于是代数和几何就这样合为一家人了．

笛卡尔在科学上的贡献是多方面的．但他的哲学思想和方法论，在其一生活动中则占有更重要的地位．他的哲学思想对后来的哲学和科学的发展，产生了极大的影响．

1649 年，笛卡尔被瑞典年轻女王克里斯蒂娜聘为私人教师，每天清晨 5 点就赶赴宫廷，为女王讲授哲学，素有晚起习惯的笛卡尔，又遇到瑞典几十年少有的严寒，不久便得了肺炎．1650 年 2 月 11 日，这位年仅 54 岁、终生未婚的科学家病逝于瑞典斯德哥尔摩．由于教会的阻止，仅有几个友人为其送葬．他的著作在他死后也被列入梵蒂冈教皇颁布的禁书目录之中．但是，他的思想的传播并未因此而受阻，笛卡尔成为 17 世纪及其以后的欧洲哲学界和科学家最有影响的巨匠之一，被誉为“近代科学的始祖”．法国大革命之后，笛卡尔的骨灰和遗物被送进法国历史博物馆．1819 年，其骨灰被移入圣日耳曼圣心堂中．他的墓碑上镌刻着：笛卡尔，欧洲文艺复兴以来，第一个为争取和捍卫理性权利而奋斗的人．