第 2 章　导数与微分

本章学习目标

- 理解导数和微分的概念及其几何意义
- 熟练掌握导数的四则运算法则和基本求导公式
- 熟练掌握复合函数、隐函数的求导方法
- 了解高阶导数的概念及二阶导数的求法
- 了解可导、可微、连续的关系

2.1　导数的概念

2.1.1　导数概念的引例

例 2.1.1　产品总成本的变化率．

设某产品的成本 C 是产量 Q 的函数，即

$$C = C(Q) \quad（Q > 0）.$$

如果产量由 Q_0 变到 $Q_0 + \Delta Q$，总成本取得相应的改变量 ΔC，则

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{C(Q_0 + \Delta Q) - C(Q_0)}{\Delta Q}$$

表示该产品由 Q_0 变到 $Q_0 + \Delta Q$ 时，总成本的平均变化率．显然，ΔQ 越小，总成本的平均变化率就越接近于总成本在产量为 Q_0 时的变化率,当 $\Delta Q \to 0$ 时，如果极限

$$\lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{C(Q_0 + \Delta Q) - C(Q_0)}{\Delta Q}$$

存在，则此极限值表示产量为 Q_0 时的总成本变化率，经济学中称为边际成本．

例 2.1.2　平面曲线的切线斜率．

设一曲线方程为 $y = f(x)$，求曲线上任一点处的切线斜率．

在曲线 $y = f(x)$ 上任取两点 M 、N ，作割线 MN ．让 N 沿着曲线趋向 M ，割线 MN 的极限位置 MT 就称为曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处的切线．如图 2.1 所示，下面求曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处的切线的斜率．

记曲线 $y = f(x)$ 上的点 M ， N 的坐标分别为

$$(x_0, y_0),\quad (x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)\ ,$$

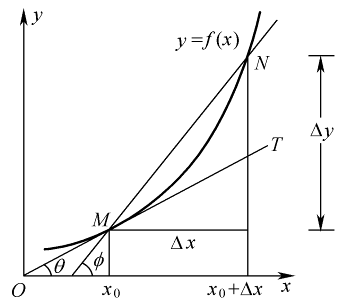

图 2.1

则割线 MN 的斜率为

$$k_{\mathrm{MN}}=\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

这里 φ 为割线 MN 的倾角，θ 是切线 MT 的倾角，当点 N 沿曲线趋于点 M 时，即 $\Delta x\to 0$ 时，若上式的极限存在，记为 k，即

$$\tan\theta=k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

则此极限值 k 就是所求的切线的斜率，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

2.1.2　导数的概念

1. 导数的概念

定义 2.1.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 也在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{2.1.1}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作

$$f'(x_0),\quad y'\big|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} 或 \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果极限（2.1.1）不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

若记 $x=x_0+\Delta x$，由于当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$，所以导数 $f'(x_0)$ 的定义也可表示为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

引入了导数的概念，前面讨论的两个实际问题就可简述如下：

（1）产品在产量为 Q_0 时总成本的变化率（边际成本）就是成本函数 $C(Q)$ 在点 Q_0 处的导数.

（2）曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，即

$$k=\tan\theta=f'(x_0)\ .$$

2. *左、右导数*

既然导数是增量比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x\to 0$ 时的极限，那么下面两个极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

分别叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数，分别记为 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

由上一章关于左、右极限的性质可知下面的定理.

定理 2.1.1 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等.

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导．此时，对于每一个 $x\in(a,b)$ ，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值 $f'(x)$，从而构成了一个新的函数，称为函数 $f(x)$ 的导函数，记作 y'，$f'(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ .$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}\ .$$

通常导函数简称为导数.

下面应用导数的定义计算一些简单函数的导数，根据定义求函数 $y=f(x)$ 的导数，一般分为以下三步：

（1）求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

（2）计算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

（3）求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 2.1.3 求函数 $y=C$ 的导数.

解 （1）求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$ ；

（2）算比值 $\dfrac{0}{\Delta x}=0$；

（3）求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$.

即

$$(C)'=0 .$$

例 2.1.4 求函数 $y=x^2$ 的导数.

解 （1）求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$；

（2）算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$；

（3）求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

即

$$(x^2)'=2x .$$

同理可得 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）.

特别地，当 $n=1$ 时，$(x)'=1$.

一般地，当指数为任意实数 μ 时，可以证明（在下一节给出证明）

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1} .$$

例如，求函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数.

$$y'=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

又如，求函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的导数.

$$y'=(\frac{1}{x})'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

以上两个幂函数的导数用得较多，可作为基本公式使用.

例 2.1.5 求指数函数 $y=a^x$ 的导数（$a>0$，$a\neq 1$）.

解 （1）求增量 $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x$；

（2）求比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}$；

（3）求极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a .$$

即

$$(a^x)'=a^x\ln a .$$

特别地，上式中令 $a=\mathrm{e}$，可得自然对数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的导数

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x .$$

例 2.1.6　求对数函数 $y=\log_a x$ 的导数（$a>0$，$a\neq 1$，$x>0$）.

解　（1）求增量 $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$；

（2）算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$；

（3）求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\dfrac{1}{x\ln a}$.

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，上式中令 $a=\mathrm{e}$，可得自然对数函数 $y=\ln x$ 的导数

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

例 2.1.7　求函数 $y=\sin x$ 的导数.

解　（1）求增量 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})\sin\dfrac{\Delta x}{2}$；

（2）算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$；

（3）求极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x.$$

即

$$(\sin x)'=\cos x.$$

类似的方法可得 $(\cos x)'=-\sin x$.

2.1.3　导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点$(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率（如图 2.1 所示），即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\varphi\to\theta}\tan\varphi=\tan\theta=k.$$

过曲线上一点且垂直于该点处切线的直线，称为曲线在该点处的法线.

根据导数的几何意义，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad（f'(x_0)\neq 0）.$$

若 $f'(x_0)=\infty$，则切线垂直于 x 轴，切线的方程就是 x 轴的垂线 $x=x_0$.

例 2.1.8 求曲线 $y=x^2$ 在点 $(2,4)$ 处的切线和法线方程.

解 因 $y'=2x$，由导数几何意义，曲线 $y=x^2$ 在点 $(2,4)$ 的切线与法线的斜率分别为

$$k_1=y'\big|_{x=2}=4,\ k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{4},$$

于是所求的切线方程为 $y-4=4(x-2)$，

即 $4x-y-4=0$.

法线方程为 $y-4=-\frac{1}{4}(x-2)$，

即 $x+4y-18=0$.

2.1.4 可导与连续的关系

定理 2 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

证明 因 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，故有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

根据函数极限与无穷小间的关系，可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小．两端乘以 Δx，得

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

由此可见

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x\right]=0,$$

即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

上述定理的逆命题不一定成立，即在某点连续的函数，在该点未必可导.

例 2.1.9 证明函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导（如图 2.2 所示）.

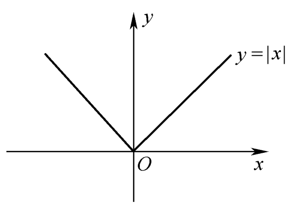

图 2.2

证明 因为
$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = |0+\Delta x| - |0| = |\Delta x|,$$
则
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x| = 0.$$
由连续定义，$y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续．又因为
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$
当 $\Delta x>0$ 时，$y=f(x)$ 在 $x=0$ 的右导数为
$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$
当 $\Delta x<0$ 时，$y=f(x)$ 在 $x=0$ 的左导数为
$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$
即函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的左、右导数不相等，从而在 $x=0$ 点处不可导．由此可见，函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件．

习题 2.1

1．一质点以初速度 v_0 向上作抛物运动，其运动方程为
$$s=s(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \quad (v_0>2，且为常数).$$
（1）求质点在 t 时刻的瞬时速度；

（2）何时质点的速度为 0；

（3）求质点回到出发点时的速度．

2．求解下列问题．

（1）求圆的面积 S 相对于半径变量 r 的变化率；

（2）求圆的面积为 1 时，周长变量 l 相对于半径变量 r 的变化率；

（3）求圆的面积为 1 时，面积变量 S 相对于周长变量 l 的变化率．

3．求下列函数在指定点的导数．

（1）$y=\cos x，x=\dfrac{\pi}{2}$；（2）$y=\ln x，x=5$．

4．求下列函数的导数．

（1）$y=\log_3 x$；（2）$y=\dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$；

（3）$y=\sqrt[3]{x^2}$；（4）$y=\cos x$．

5．判断下列命题是否正确？为什么？

（1）若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续；

（2）若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处必可导；

（3）若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处必不可导；

（4）若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必不连续.

6．下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按导数定义观察下列极限.

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；　　（2）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

7．求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点(1,1)处的切线方程与法线方程.

8．求曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点(0,1)处的切线方程与法线方程.

9．问 a、b 取何值时，才能使函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0\end{cases}$ 在 $x=x_0$ 处连续且可导？

10．讨论下列函数在 $x=0$ 处是否连续、是否可导？

（1）$y=x|x|$；　　（2）$y=|\sin x|$；

（3）$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$　　（4）$y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

11．设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-1, & x<0,\\ x+a, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ b\sin(x-1)+1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求 a，b，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处可导.

12．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=-1$.（1）求 $f(0)$；（2）$f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导？

13．设 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 $f(x)=g(x)\sin 2x$ 在 $x=0$ 处的导数.

14．设 $f(0)=1$，$g(1)=2$，$f'(0)=-1$，$g'(1)=-2$，求：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-f(x)}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x f(x)-1}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}g(x)-2}{x-1}$.

15．设 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(\ln x)-1}{1-x}$.

2.2　导数的运算

2.2.1　函数的和、差、积、商的求导法则

定理 2.2.1　设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处均可导，则它们的和、差、积、商（当分母不为零时）在点 x 处也可导，且有以下法则：

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

（2）$(uv)' = u'v + uv'$；

若 $v = C$ （C 为常数），则 $(Cu)' = Cu'$；

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

下面我们给出法则（3）的证明，其余的留给读者自证.

证明 令 $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

（1）求函数的增量．给自变量 x 一个增量 Δx，则

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$= \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{[v(x)+\Delta v]v(x)}.$$

（2）算比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{[v(x)+\Delta v]v(x)}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) - \frac{\Delta v}{\Delta x}u(x)\right].$$

（3）求极限．因 $u(x)$, $v(x)$ 在点 x 处可导，则在该点处必连续，故当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta u \to 0$，$\Delta v \to 0$；又当 $\Delta x \to 0$ 时，$\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x)$，$\dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x)$,

所以

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

特别地，若 $u(x) = 1$，则可得公式

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \quad （v \neq 0）.$$

法则（1），（2）均可推广到有限多个可导函数的情形.

设 $u = u(x)$，$v=v(x)$，$w=w(x)$ 在点 x 处均可导，则

$$(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w',$$
$$(uvw)' = [(uv)w]' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + uv')w + uvw'$$
$$= u'vw + uv'w + uvw'.$$

例 2.2.1 设 $y = x^{\frac{1}{2}} - \cos x + \ln x + \ln 2$，求 y'.

解 $y' = (x^{\frac{1}{2}} - \cos x + \ln x + \ln 2)' = (x^{\frac{1}{2}})' - (\cos x)' + (\ln x)' + (\ln 2)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin x + \frac{1}{x}.$$

例 2.2.2 设 $y = 5x^3 3^x$，求 y'.

解 $y' = (5x^3 3^x)' = 5(x^3)'3^x + 5x^3(3^x)' = 15x^2 3^x + 5x^3 3^x \ln 3$.

例 2.2.3 求 $y = \tan x$ 的导数.

解 $y' = (\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x .$$

即
$$(\tan x)' = \sec^2 x .$$

用类似的方法，可得 $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

例 2.2.4 求 $y = \sec x$ 的导数.

解 $y' = (\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x} \cdot \tan x = \sec x \cdot \tan x$.

即
$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x .$$

用类似的方法，可得 $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$.

2.2.2 复合函数的导数

定理 2.2.2 如果函数 $u = \varphi(x)$ 在 x 处可导，而函数 $y = f(u)$ 在对应的 u 处可导，那么复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad 或 \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

证明 给自变量 x 一个增量 Δx ，相应地函数 $u = \varphi(x)$ 与 $y = f(u)$ 的改变量为 Δu 和 Δy . 根据函数极限与无穷小的关系定理，由 $y = f(u)$ 可导，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + \alpha ,$$

其中 α 是当 $\Delta u \to 0$ 时的无穷小. 上式两边同乘 Δu 得

$$\Delta y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u ,$$

于是
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} ,$$

因为函数 $u = \varphi(x)$ 在 x 处可导，所以 $u = \varphi(x)$ 在 x 处连续，当 $\Delta x \to 0$ 时， $\Delta u \to 0$ ，因此 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha = 0$ ，从而有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} .$$

上式表明，求复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 对 x 的导数时，可先分别求出 $y = f(u)$ 对 u 的导数和 $u = \varphi(x)$ 对 x 的导数，然后相乘即可.

以上法则还可记为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ 或 $\{ f[\varphi(x)] \}' = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

对于多次复合的函数，其求导公式类似，这种复合函数的求导法则也称为链导法.

例 2.2.5 设 $y=\ln(1+x^2)$，求 y'.

解 $y=\ln(1+x^2)$ 可看作是由 $y=\ln u$，$u=1+x^2$ 复合而成的，因此

$$y'=(\ln u)'_u\cdot(1+x^2)'_x=\frac{1}{u}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}.$$

例 2.2.6 设 $y=\sin 3x$，求 y'.

解 $y=\sin 3x$ 可看作是由 $y=\sin u$，$u=3x$ 复合而成的，因此

$$y'=(\sin u)'_u\cdot(3x)'_x=\cos u\cdot 3=3\cos 3x.$$

对复合函数的复合过程熟悉后，就不必再写中间变量，可直接按复合步骤求导.

例 2.2.7 $y=\sin\sqrt{x^2+2}$，求 y'.

解 $y'=\cos\sqrt{x^2+2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot 2x=\dfrac{x\cos\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}$.

例 2.2.8 $y=\ln\cos \mathrm{e}^x$，求 y'.

解 $y'=\dfrac{1}{\cos \mathrm{e}^x}\cdot(-\sin \mathrm{e}^x)\cdot \mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x\tan \mathrm{e}^x$.

例 2.2.9 $y=(5x^2+2)^{10}$，求 y'.

解 $y'=10(5x^2+2)^9(5x^2)'=100x(5x^2+2)^9$.

例 2.2.10 证明 $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$.

证明 $(x^\mu)'=(\mathrm{e}^{\mu\ln x})'=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\cdot\mu\cdot\dfrac{1}{x}=x^\mu\cdot\mu\cdot\dfrac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}$.

2.2.3 反函数的求导法则

定理 2.2.3 如果单调连续函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间内可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间内可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

证明 因 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，故可将函数 $x=\varphi(y)$ 中的 y 看作中间变量，从而组成复合函数 $x=\varphi(y)=\varphi[f(x)]$. 上式两边对 x 求导，应用复合函数的链导法，得

$$1=\varphi'_y\cdot f'_x \quad 或 \quad 1=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

因此

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi(y)}\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}\qquad\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\varphi(y)\neq 0\right).$$

例 2.2.11 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，而 $x=\sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调且可导，且 $(\sin y)'_y=\cos y\neq 0$，因此在对应的区间 $(-1,1)$ 内，有

$$(\arcsin x)'_x=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即
$$(\arcsin x)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得
$$(\arccos x)'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 2.2.12 求函数 $y=\arctan x$ 的导数.

解 $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 的反函数，而 $x=\tan y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调且可导，且 $(\tan y)'_y=\sec^2 y\neq 0$，因此在对应的区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，有

$$(\arctan x)'_x=\frac{1}{(\tan y)'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

即
$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

同理可得
$$(\operatorname{arc\,cot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

2.2.4 初等函数的导数

前面我们已经给出了几个基本初等函数的导数，建立了函数的四则运算求导法则、复合函数的求导法则以及反函数的求导法则，这就解决了初等函数的求导问题．现将基本导数公式汇成表 2-1.

表 2-1 基本导数公式表

1．$(C)'=0$ （C 为常数）；	2．$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$ （μ 为常数）；
3．$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$；	4．$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；
5．$(a^x)'=a^x\ln a$；	6．$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；
7．$(\sin x)'=\cos x$；	8．$(\cos x)'=-\sin x$；

9．$(\tan x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$；	10．$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$；
11．$(\sec x)' = \sec x \tan x$；	12．$(\csc x)' = -\csc x \cot x$；
13．$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；	14．$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；
15．$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；	16．$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$；
17．$(\sinh x)' = \cosh x$；	18．$(\cosh x)' = \sinh x$．

以上基本导数公式十分重要，要熟练掌握，同时还要熟练运用函数的四则运算求导法则与复合函数的求导法则，以此求初等函数的导数.

例 2.2.13 设 $y = (x^2 + \cos x)^5$，求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}$．

解
$$y' = [(x^2 + \cos x)^5]' = 5(x^2 + \cos x)^4 (x^2 + \cos x)'$$
$$= 5(x^2 + \cos x)^4 (2x - \sin x)，$$

所以
$$y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \left[5(x^2 + \cos x)^4 (2x - \sin x)\right]\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi^8(\pi - 1)}{2^8}．$$

例 2.2.14 设 $y = \mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$，求 y'．

解
$$y' = (\mathrm{e}^{x^2})' + \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)' = 2x\mathrm{e}^{x^2} + \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}．$$

例 2.2.15 设 $y = 2^{-x} \arcsin \dfrac{x^2}{2}$，求 y'．

解
$$y' = (2^{-x})' \arcsin \frac{x^2}{2} + \left(\arcsin \frac{x^2}{2}\right)' 2^{-x} = (-2^{-x} \ln 2) \arcsin \frac{x^2}{2} + \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{4}}} 2^{-x}$$
$$= 2^{-x} \left(\frac{2x}{\sqrt{4 - x^4}} - \ln 2 \cdot \arcsin \frac{x^2}{2}\right)．$$

例 2.2.16 设 $y = \dfrac{\ln^2 x}{x} + \sin^3 x$，求 y'．

解
$$y' = \left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)' + \left(\sin^3 x\right)' = \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln^2 x}{x^2} + 3\sin^2 x \cos x$$
$$= \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} + 3\sin^2 x \cos x．$$

例 2.2.17 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.2.5 隐函数和由参数方程确定的函数的导数

1. 隐函数的导数

设方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的隐函数 $y=y(x)$. 求隐函数的导数，可根据复合函数的链导法，直接由方程求得它所确定的隐函数的导数.

例 2.2.18 求方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 因为 y 是 x 的函数，所以 y^2 是 x 的复合函数，利用链导法，方程两端对 x 求导，得

$$2x+2y\cdot y'=0.$$

解出 y'，便得到所求的隐函数的导数

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}\qquad（y\neq 0）.$$

例 2.2.19 求方程 $\mathrm{e}^y-x^2y^3+\mathrm{e}^x=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 因为 y 是 x 的函数，所以 e^y 是 x 的复合函数，利用链导法，方程两端对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^y\cdot y'-(2xy^3+3x^2y^2y')+\mathrm{e}^x=0.$$

解出 y'，便得到所求的隐函数的导数

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy^3-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y-3x^2y^2}\qquad（\mathrm{e}^y-3x^2y^2\neq 0）.$$

例 2.2.20 设 $y=\arctan(x+2y)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 这是一个隐函数的导数问题，两边对 x 求导，得

$$y'=\frac{1}{1+(x+2y)^2}(1+2y'),$$

解出 y'，得
$$y'=\frac{1}{(x+2y)^2-1}.$$

例 2.2.21 $y=(1+x^2)^x$，求 y'.

解 **方法** 1

函数 y 可以写成 $y=(1+x^2)^x=\mathrm{e}^{x\cdot\ln(1+x^2)}$，所以

$$y' = [e^{x\cdot\ln(1+x^2)}]' = e^{x\cdot\ln(1+x^2)}[x\cdot\ln(1+x^2)]'$$
$$= e^{x\cdot\ln(1+x^2)}\left[\ln(1+x^2)+\frac{x}{1+x^2}(1+x^2)'\right]$$
$$= (1+x^2)^x\cdot\left[\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right].$$

方法 2

将函数 $y=(1+x^2)^x$ 两边取自然对数，即 $\ln y = x\cdot\ln(1+x^2)$．两边对 x 求导，注意左端的 y 是 x 的函数，由复合函数求导法，有

$$\frac{1}{y}y' = \ln(1+x^2)+\frac{x}{1+x^2}\cdot 2x = \ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}.$$

因此

$$y' = (1+x^2)^x\cdot\left[\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right].$$

形为 $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$（$f(x)>0$）的函数称为幂指函数．求幂指函数的导数，可选用此例中介绍的两种方法中的任一种，方法 2 称为对数求导法，这个方法除适用于幂指函数外，还适用于多个因式连乘的函数．

例 2.2.22 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x^2+1)(3x-4)}{(x+1)(x^2+3)}}$，求 y'．

解 将函数两边取自然对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)+\ln(3x-4)-\ln(x+1)-\ln(x^2+3)],$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{3x-4}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+3}\right],$$

所以
$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x^2+1)(3x-4)}{(x+1)(x^2+3)}}\cdot\left[\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{3x-4}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+3}\right].$$

2. 由参数方程确定的函数的导数

变量 x 与 y 之间的函数关系在一定条件下可由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

确定，其中 t 是参数，对参数方程所确定的函数 $y=f(x)$ 求导，不必消去 t 解出 y 对于 x 的直接关系，可利用参数方程直接求得 y 对 x 的导数．

设 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都是可导函数，且 $x=\varphi(t)$ 具有单值连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则参数方程确定的函数可以看成 $y=\psi(t)$ 与 $t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数，根据复合函数和反函数求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

这就是由参数方程所确定的函数 $y=f(x)$ 的求导公式.

例 2.2.23 已知摆线的参数方程

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}\quad（0\leqslant t\leqslant 2\pi），求\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

解 由参数方程求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

例 2.2.24 求曲线 $\begin{cases}x=t^2-1,\\ y=t-t^3\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程.

解 曲线上对应 $t=1$ 的点为 $(0,0)$，曲线在 $t=1$ 处的切线斜率为

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\frac{1-3t^2}{2t}\right|_{t=1}=\frac{-2}{2}=-1,$$

于是所求的切线方程为

$$y=-x.$$

2.2.6 高阶导数

如果函数 $f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，就称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y''，$f''(x)$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

即

$$y''=(y')',\ f''(x)=[f'(x)]',$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

类似地，这个定义可推广到 $y=f(x)$ 的更高阶的导数，如 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，记作 $\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$，$f^{(n)}(x)$，$y^{(n)}$.

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数. 二阶导数有明显的物理意义，考虑物体的直线运动，设位移函数为 $s=s(t)$，则速度 $v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，而加速度 a 是速度对时间的导数,是位移函数对时间的二阶导数,即 $a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$.

根据高阶导数的定义，求函数的高阶导数就是将函数逐次求导，因此，前面介绍的导数运算法则与导数基本公式仍然适用于高阶导数的计算.

例 2.2.25 设 $y=a^x$，求 $y^{(n)}$.

解 $y'=a^x\ln a$，$y''=a^x(\ln a)^2,\cdots$，$y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$.

特别地，$$(e^x)^{(n)} = e^x .$$

例 2.2.26 求 n 次多项式函数 $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 的 $n+1$ 阶导数（n 是正整数）.

解 $y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$，

$y'' = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}$，

$\vdots$

$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_0 = n!a_0$，

$y^{(n+1)} = 0$.

例 2.2.27 设 $y = \sin x$，求 $y^{(n)}$.

解
$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \left[\sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

……

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

即
$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

同理可得
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

以上几例的结果均可用数学归纳法证得.

例 2.2.28 设 $y = e^{-x}\cos x$，求 y''.

解 $y' = -e^{-x}\cos x + e^{-x}(-\sin x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$，

$y'' = e^{-x}(\cos x + \sin x) - e^{-x}(-\sin x + \cos x) = 2e^{-x}\sin x$.

例 2.2.29 设 $e^x + xy = 1$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 方程两边对 x 求导，得
$$e^x + y + xy' = 0, \tag{1}$$

即
$$y' = -\frac{y + e^x}{x}. \tag{2}$$

对（1）式两边再对 x 求导，得
$$e^x + y' + y' + xy'' = 0, \tag{3}$$

即
$$y''=-\frac{2y'+e^x}{x}. \tag{4}$$

将（2）式代入（4）式得
$$y''=-\frac{2y+2e^x-xe^x}{x^2}.$$

例 2.2.30 求方程$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)}{dx}=\frac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

习题 2.2

1．求下列函数的导数.

（1）$y=xa^x+7e^x$；（2）$y=3x\tan x+\sec x-4$；

（3）$y=x^3+3x\sin x$；（4）$y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}+\dfrac{1}{x}$；

（5）$y=x^2\ln x$；（6）$y=3e^x\cos x$；

（7）$y=\dfrac{\ln x}{x}$；（8）$y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3$；

（9）$y=x^2\ln x\cos x$；（10）$y=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$；

（11）$y=\dfrac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}$；（12）$y=\dfrac{2x^2-x+1}{x+2}$；

（13）$y=x^2\log_3 x$；（14）$y=x\arctan x$；

（15）$y=2^x\arcsin x-3\sqrt[3]{x^2}$；（16）$y=\arcsin x+\arccos x$.

2．设$f(x)$可导，求下列函数的导数.

（1）$y=[f(x)]^2$；（2）$y=e^{f(x)}$；

（3）$y=\dfrac{1}{1+[f(x)]^2}$；（4）$y=\arctan[f(x)]$；

（5）$y=\ln[1+f^2(x)]$；（6）$y=f(\sqrt{x}+1)$.

3．求下列函数的导数.

（1）$y=(x^2-x)^5$；（2）$y=2\sin(3x+6)$；

（3）$y=\cos^3 x$；（4）$y=\ln(\tan x)$；

（5）$y=\sqrt{1+\ln x}$；（6）$y=\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$；

（7） $y=(x-2\sqrt{x})^4$；（8） $y=xe^{-2x}$；

（9） $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$；（10） $y=\ln(2^{-x}+3^{-x}+4^{-x})$；

（11） $y=(\sin(\sqrt{1-2x})^2$；（12） $y=2^{\sqrt{x+1}}-\ln(\sin x)$；

（13） $y=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ （$a>0$）；

（14） $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ （$a>0$）；

（15） $y=(\arcsin\dfrac{x}{2})^2$；（16） $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$；

（17） $y=\ln\ln\ln x$；（18） $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$.

4．用对数求导法求下列函数的导数.

（1） $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$；（2） $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$；

（3） $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；（4） $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$

（5） $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^3-2}}$；（6） $y=\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$.

5．已知 $y=x^2+a$ 与 $y=b\ln(1+2x)$ 在 $x=1$ 点相切（两曲线在 (x_0,y_0) 处相切是指它们在 (x_0,y_0) 处有共同切线），求 a， b 的值.

6．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内可导，

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，证明 $f'(x)$ 为偶函数；

（2）若 $f(x)$ 为偶函数，证明 $f'(x)$ 为奇函数；

（3）若 $f(x)$ 为周期函数，证明 $f'(x)$ 为周期函数.

7．求下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

（1） $x^2-y^2=xy$；（2） $x\cos y=\sin(x+y)$；

（3） $xy=e^{x+y}$；（4） $y=1-xe^y$.

8．参数方程 $\begin{cases}x=e^t(1-\cos t),\\ y=e^t(1+\sin t),\end{cases}$ $t\in(-\infty,+\infty)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{dx}{dy}$.

9．求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（1） $y=x\cos x$；（2） $y=e^{2x-1}$.

（3） $y=(1+x^2)\arctan x$；（4） $y=\dfrac{e^x}{x}$；

（5） $y=xe^{x^2}$；（6） $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

10．证明 $y=e^{-x}(\sin x+\cos x)$ 满足方程 $y''+y'+2e^{-x}\cos x=0$.

11．求 $y=3^{-x}$ 的 n 阶导数.

2.3 微分

在工程技术中，常遇到与导数密切相关的一类问题，这就是当自变量有一个微小的改变量 Δx 时，要计算相应的函数的改变量 Δy . 这类问题往往是比较困难的，需要找出一种便于计算函数改变量的近似公式.

2.3.1 微分的概念

现在考察一个具体问题.

例 2.3.1 设有一个边长为 x_0 的正方形金属片，受热后它的边长伸长了 Δx ，问其面积增加了多少？

解 正方形金属片的面积 A 与边长 x 的函数关系为 $A=x^2$. 由图 2.3 可以看出，受热后，当边长由 x_0 伸长到 $x_0+\Delta x$ 时，面积 A 相应的增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2 .$$

从上式可以看出，ΔA 可分成两部分:第一部分是 Δx 的线性函数 $2x_0\Delta x$ ，当 $\Delta x\to 0$ 时与 Δx 为同阶无穷小；第二部分 $(\Delta x)^2$ ，当 $\Delta x\to 0$ 时是 Δx 的高阶无穷小. 这表明，当 $|\Delta x|$ 很小时，第二部分的绝对值要比第一部分的绝对值小得多，可以忽略不计，而只用一个简单的函数，即 Δx 的线性函数作为 ΔA 的近似值

$$\Delta A\approx 2x_0\Delta x . \tag{2.3.1}$$

显然，$2x_0\Delta x$ 是容易计算的，它是边长 x_0 有增量 Δx 时，面积 ΔA 的增量的主要部分（亦称线性主部）.

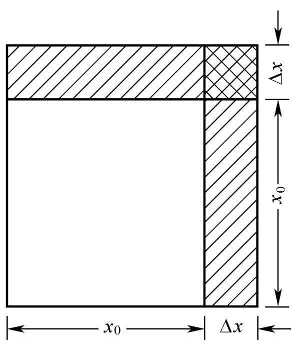

图 2.3

考虑到 $2x_0=A'\big|_{x=x_0}=A'(x_0)$，（2.3.1）式可写成

$$\Delta A\approx A'(x_0)\Delta x .$$

由此引入函数微分的概念.

定义 2.3.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0

处的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$ 是当 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}，\ 即\ \mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = A\Delta x . \tag{2.3.2}$$

于是，（2.3.1）式可写成

$$\Delta A \approx \mathrm{d}A\Big|_{x=x_0} .$$

可以证明，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微与可导是等价的，且 $A = f'(x_0)$,因而 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分可写成

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x .$$

通常把自变量的增量 Δx 记为 $\mathrm{d}x$，称为自变量的微分，于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分又可写成

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\mathrm{d}x . \tag{2.3.3}$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可微，则称该函数在 (a,b) 内可微，或称函数 $f(x)$ 是在 (a,b) 内的可微函数．此时，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意一点 x 处的微分记为 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x, \tag{2.3.4}$$

上式两端同除以自变量的微分 $\mathrm{d}x$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) .$$

这就是说，函数 $f(x)$ 的导数等于函数的微分与自变量的微分的商，因此导数也称为微商.

例 2.3.2 设 $y=\sqrt{5+x^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\mathrm{d}y$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\sqrt{5+x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{5+x^2}}(5+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{5+x^2}},$$

$$\mathrm{d}y = \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}\mathrm{d}x .$$

例 2.3.3 求当 $x=1$，$\Delta x = 0.01$ 时函数 $y=x^2+1$ 的微分.

解 函数在任意点的微分

$$\mathrm{d}y = (x^2+1)'\Delta x = 2x\Delta x,$$

于是
$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}} = 2x\Delta x\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}} = 0.02 .$$

例 2.3.4 半径为 r 的圆的面积为 $S=\pi r^2$，当半径增大 Δr 时，求圆面积的增量与微分.

解 面积的增量 $\Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2$.
面积的微分为 $\mathrm{d}S=S_r'\cdot\Delta r=2\pi r\Delta r.$

2.3.2 微分的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2.4 所示．过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $M(x,y)$ 处作切线 MT ，设 MT 的倾角为 α ，则

$$\tan\alpha=f'(x) .$$

当自变量 x 有增量 Δx 时，切线 MT 的纵坐标相应地有增量

$$QP=\tan\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\Delta x=\mathrm{d}y .$$

因此，微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 几何上表示当 x 有增量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$ 在对应点 $M(x,y)$ 处的切线的纵坐标的增量. 用 $\mathrm{d}y$ 近似代替 Δy 就是用点 M 处的切线纵坐标的增量 QP 近似代替曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标的增量 QN ，并且 $|\Delta y-\mathrm{d}y|=PN$.

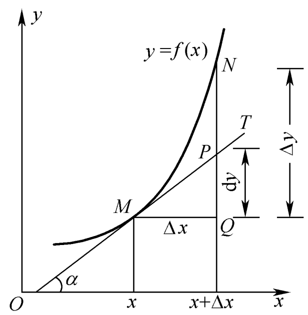

图 2.4

2.3.3 微分的基本公式与微分法则

1. 微分的基本公式

函数 $y=f(x)$ 的微分等于导数 $f'(x)$ 乘以 $\mathrm{d}x$ ，所以根据导数公式和运算法则，就能得相应的微分公式和微分运算法则.

（1） $\mathrm{d}(C)=0$ （ C 为常数）；　　（2） $\mathrm{d}(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$ ；

（3） $\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$ ；　　（4） $\mathrm{d}\ln x=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ ；

（5） $\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$ ；　　（6） $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ ；

（7） $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$ ；　　（8） $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$ ；

（9） $\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ ；

（10） $\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ ；

（11） $d(\sec x)=\sec x\tan x dx$；（12） $d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$；

（13） $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；（14） $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

（15） $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$；（16） $d(\operatorname{arc}\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$．

2. 函数的和、差、积、商的微分运算法则

设函数 $u(x)=u$， $v(x)=v$ 均可微，则

$$d(u\pm v)=du\pm dv;$$

$$d(uv)=v\,du+u\,dv;$$

$$d(Cu)=C\,du \quad （C\text{ 为常数}）;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2} \quad （v\neq 0）.$$

3. 复合函数的微分法则

设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都是可导函数，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy=\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'_x dx=f'(u)\varphi'(x)dx,$$

而 $$du=\varphi'(x)dx,$$

于是 $$dy=f'(u)du. \tag{2.3.5}$$

将（2.3.5）式与（2.3.4）式比较，可见不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分总保持同一形式，这个性质称为一阶微分形式不变性.

利用这个性质，可以比较方便地求一些复合函数的微分、隐函数的微分以及它们的导数.

例 2.3.5　$y=\sin(2x+1)$，求 dy．

解　把 $2x+1$ 看成中间变量 u，则

$$dy=d(\sin u)=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)=\cos(2x+1)2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

在求复合函数的导数时，可以不写出中间变量．在求复合函数的微分时，类似地也可以不写出中间变量.下面我们用这种方法来求函数的微分.

例 2.3.6　$y=\ln(1+e^{x^2})$，求 dy．

解　$$dy=d(\ln(1+e^{x^2}))=\frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}d(x^2)$$

$$=\frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}2xd(x)=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}d(x).$$

例 2.3.7　$y=e^{1-3x}\cos x$，求 dy．

解　应用函数的积的微分法则，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x}\cos x)=\cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x})+\mathrm{e}^{1-3x}\mathrm{d}(\cos x)\\&=(\cos x)\mathrm{e}^{1-3x}(-3\mathrm{d}x)+\mathrm{e}^{1-3x}(-\sin x\mathrm{d}x)\\&=-\mathrm{e}^{1-3x}(3\cos x+\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 2.3.8 求由方程 $x^3+2xy-2y^3=1$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与微分 $\mathrm{d}y$.

解 **方法 1** 对方程两边求导数，得

$$3x^2+2y+2xy'-6y^2y'=0,$$

导数为
$$y'=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x},$$

微分为
$$\mathrm{d}y=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x}\mathrm{d}x.$$

方法 2 对方程两边求微分，得

$$\mathrm{d}(x^3+2xy-2y^3)=0，\text{即 } 3x^2\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x-6y^2\mathrm{d}y=0,$$

所以微分为
$$\mathrm{d}y=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x}\mathrm{d}x,$$

导数为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x}.$$

例 2.3.9 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立.

（1）$\mathrm{d}(\quad)=x\mathrm{d}x$；　　（2）$\mathrm{d}(\quad)=\cos\omega t\mathrm{d}t$.

解 （1）我们知道，$\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x$.可见 $x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)=\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.

即
$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=x\mathrm{d}x.$$

一般地，有 $\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)=x\mathrm{d}x$（$C$ 为任意常数）.

（2）因为 $\mathrm{d}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\mathrm{d}t$ ，可见 $\cos\omega t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t)=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$.

即
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)=\cos\omega t\mathrm{d}t.$$

一般地，有 $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t\mathrm{d}t$（$C$ 为任意常数）.

由以上讨论可以看出，微分与导数虽是两个不同的概念，但却紧密相关，事实上求出了导数便立即可得到微分，求出了微分亦可得到导数，即

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

通常把函数的导数与微分的运算统称为微分法．在高等数学中，把研究导数和微分的有关内容称为微分学．

*2.3.4　微分在近似计算中的应用

在实际问题中，经常利用微分作近似计算．

由微分的定义可知，当$|\Delta x|$很小时，

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x,$$

或写成

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x, \tag{2.3.6}$$

记 $x_0+\Delta x=x$，则上式又可写为

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2.3.7}$$

特别地，当 $x_0=0$ 时，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x. \tag{2.3.8}$$

公式（2.3.6）、（2.3.7）、（2.3.8）都可用来求函数 $f(x)$ 的近似值．

应用（2.3.8）式可以推得一些常用的近似公式，当$|x|$很小时，有

（1）$\sin x\approx x$；　（2）$\tan x\approx x$；　（3）$\mathrm{e}^x\approx 1+x$；

（4）$\ln(1+x)\approx x$；　（5）$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$．

例 2.3.10　计算 $\sin 46^\circ$ 的近似值．

解　设 $f(x)=\sin x$，取 $x=46^\circ$，$x_0=45^\circ=\frac{\pi}{4}$，则 $x-x_0=1^\circ=\frac{\pi}{180}$，

于是由（2.3.7）式得

$$\sin x\approx \sin x_0+\cos x_0\cdot(x-x_0),$$

所以

$$\sin 46^\circ\approx \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.719.$$

例 2.3.11　计算$\sqrt{1.05}$的近似值.

解　设 $f(x)=\sqrt{x}$，取 $x_0=1$，$\Delta x=0.05$，

于是由（2.3.6）式得

$$\sqrt{1.05}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{2\sqrt{1}}0.05=1+\frac{1}{2}\times 0.05=1.025.$$

如果直接开方，可得 $\sqrt{1.05}=1.02470$．

将两个结果比较一下，可以看出，用 1.025 作为 $\sqrt{1.05}$ 的近似值，其误差不超过 0.001，这样的近似值在一般应用上已够精确了．如果开方次数较高，就更能体现出用微分进行近似计算的优越性．

习题 2.3

1．已知 $y = x^3 - x$，计算在当 $x = 2$，Δx 分别等于 1、0.1、0.01 时的 Δy、$\mathrm{d}y$.

2．求下列函数的微分：

（1）$y = \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$；　　（2）$y = x\sin 2x$；

（3）$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；　　（4）$y = \ln^2(1-x)$；

（5）$y = x^2\mathrm{e}^{2x}$；　　（6）$y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$；

（7）$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln x$；　　（8）$y = \sqrt{\arcsin\sqrt{x}}$；

（9）$y = \tan^2(1+2x^2)$；　　（10）$y = \sqrt{\cos 3x} + \ln\tan\dfrac{x}{2}$.

3．在括号内填入适当的函数，使等式成立.

（1）$\dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\quad)$；　　（2）$x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\quad)$；

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\quad)$；　　（4）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\quad)$.

4．求下列微分关系式中的未知函数 $f(x)$.

（1）$x\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$；　　（2）$\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}f(x)$；

（3）$\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$；　　（4）$x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$；

（5）$\ln x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x\ln x) - \mathrm{d}f(x)$；　　（6）$\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}f(x)$；

（7）$\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}f(x)$；　　（8）$\sqrt{x+1}\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$；

（9）$\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}f(x)$；　　（10）$\tan x\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$.

5．设 $y = y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2+y^2) = x + y - 1$ 所确定的隐函数，求 $\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}y\big|_{(0,1)}$.

6．利用微分求近似值.

（1）$\sqrt[6]{65}$；　　（2）$\lg 11$.

本章小结

1．基本概念

导数是一种特殊形式的极限，即函数的改变量与自变量的改变量之比在自变量改变量趋于零时的极限.

微分是导数与函数自变量改变量的乘积，或者说是函数增量的近似值.

2. 几何意义

$f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率；

微分 $\mathrm{d}y$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线纵坐标对应于 Δx 的改变量；

Δy 是曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标对应于 Δx 的改变量；

若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则必连续；连续未必可导.

3. 基本计算

本章最重要的计算就是导数运算，主要包括运用导数基本公式和运算法则计算，求简单函数和复合函数的导数，求高阶导数. 求微分的方法与求导数类似. 特别地 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，即要求微分 $\mathrm{d}y$，可以先求导数 $f'(x)$，后面再乘以一个 $\mathrm{d}x$.

有两种求导方法需要强调：

（1）隐函数求导法：设方程 $F(x,y)=0$ 表示自变量为 x 因变量为 y 的隐函数，并且可导，利用复合函数求导公式，将方程两边对 x 求导，然后解方程求出 y'.

（2）取对数求导法：对于两类特殊的函数幂指函数和多因子乘积函数，可以通过对方程的两边取对数转化为隐函数，然后按隐函数求导的方法求出导数 y'.

4. 简单应用

（1）导数：曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线方程和法线方程分别是

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

和

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

（2）微分：当 $|\Delta x|$ 很小时，有近似计算公式

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x,$$

这个公式可以用来直接计算函数的近似值.

复习题 2

1．判断下列命题是否正确？为什么？

（1）若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 点处必无切线；

（2）若曲线 $y=f(x)$ 处处有切线，则函数 $y=f(x)$ 必处处可导；

（3）若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处必可导；

（4）若 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必可导.

2．求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$、$f'_+(0)$ 及 $f'(0)$ 是否存在：

（1）$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0, \\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0.\end{cases}$

3．求下列函数的导数：

（1） $y=\dfrac{2\sec x}{1+x^2}$；　　（2） $y=\dfrac{\arctan x}{x}+\arccos x$；

（3） $y=\dfrac{1+x+x^2}{1+x}$；　　（4） $y=x(\sin x+1)\csc x$；

（5） $y=\cot x\cdot(1+\cos x)$；　　（6） $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$；

（7） $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$；　　（8） $y=\arccos\sqrt{1-3x}$；

（9） $y=\tan^3(1-2x)$．

4．求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

（1） $y\mathrm{e}^x+\ln y=1$；　　（2） $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$．

5．求函数 $y=x^2\ln x$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$．

6．求由方程 $y=1+x\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$．

7．求下列函数的 n 阶导数：

（1） $y=\sqrt[m]{1+x}$；　　（2） $y=\dfrac{1-x}{1+x}$．

8．利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值．

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 处可导且 $f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性．

10．设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

（1） $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，对一切 $x,y\in R$；

（2） $f(x)=1+xg(x)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$．

证明 $f(x)$ 在 R 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$．

自测题 2

1．填空题．

（1）$f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的________条件．$f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的________条件；

（2） $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等，是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的________条件；

（3） $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的________条件；

（4）函数 $y=(1+x)\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为________；

（5）已知 $f'(2)=3$，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2-3h)}{2h}=$________；

（6）若 $f(u)$ 可导，则 $y=f(\sin\sqrt{x})$ 的导数为________；

（7）曲线 $y=\mathrm{e}^x-3\sin x+1$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程为________；

（8）若 $f'(x_0)=1$，$f(x_0)=0$，则 $\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\dfrac{1}{h}\right)=$________；

（9）$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2$，则 $f'(x)=$________；

（10）$y=\cos(\mathrm{e}-x)$，则 $y'(0)=$________；

（11）设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$（$n\geqslant2$），则 $f'(0)=$________.

2．单选题.

（1）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　）.

A．$\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在　　B．$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C．$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在　　D．$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

（2）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（　　）.

A．左、右导数都存在　　B．左导数存在，右导数不存在

C．左导数不存在，右导数存在；　　D．左、右导数都不存在

（3）设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（　　）.

A．充分必要条件　　B．充分条件但非必要条件

C．必要条件但非充分条件　　D．既非充分条件又非必要条件

（4）$y=|x+2|$ 在 $x=-2$ 处（　　）.

A．连续　　B．不连续

C．可导　　D．可微

（5）下列函数中（　　）的导数等于 $\sin 2x$.

A．$\cos 2x$　　B．$\cos^2 x$

C．$-\cos 2x$　　D．$\sin^2 x$

（6）已知 $y=\cos x$，则 $y^{(10)}=$（　　）.

A．$\sin x$　　B．$\cos x$

C．$-\sin x$　　D．$-\cos x$

（7）下列函数中，在 $x=0$ 处可导的是（　　）.

A．$y=\ln x$　　B．$y=|\cos x|$

C. $y=|\sin x|$　　　D. $y=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$

（8）若函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ a-bx, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则（　　）.

A. $a=-1$，$b=-1$　　　B. $a=-1$，$b=1$

C. $a=1$，$b=-1$　　　D. $a=1$，$b=1$

（9）设 $f(x)=x\sin x$，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$（　　）.

A. -1　　　B. 1

C. $\dfrac{\pi}{2}$　　　D. $-\dfrac{\pi}{2}$

（10）设直线 l 与 x 轴平行，且与曲线 $y=x-e^x$ 相切，则切点坐标是（　　）.

A. $(1,1)$　　　B. $(-1,1)$

C. $(0,-1)$　　　D. $(0,1)$

（11）函数 $f(x)=|x|+1$ 在 $x=0$ 处（　　）.

A. 无定义　　　B. 不连续

C. 可导　　　D. 连续但不可导

3．计算题.

（1）设 $y=\ln\sin^2\dfrac{1}{x}$，求 y'.

（2）设 $y=(1+x^2)\arctan x$，求 y''.

（3）求函数 $y=\ln(x^3\cdot\sin x)$ 的微分 dy.

（4）设 $y=\ln^3\arcsin\sqrt{x}$，求 y'.

（5）设 $y=y(x)$ 由 $e^y-e^{-x}+xy=0$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

（6）设 $y=x^2 2^x+\dfrac{\cos x}{1-x^2}$，求 dy.