第二章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，极限是研究函数变化趋势的工具，连续是描述函数变化特性的一个概念，它们都是高等数学的研究基础．本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性等问题．

§2-1　初等函数及常用经济函数

一、基本初等函数

基本初等函数包括五大类共 16 个函数，它们是：

1．幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 是常数）及常数函数 $y=C$．

2．指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）及 $y=\mathrm{e}^x$．

3．对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）及 $y=\ln x$．

4．三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$（$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$），$y=\cot x$（$x\neq k\pi$），$y=\sec x$（$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$），$y=\csc x$（$x\neq k\pi$）．

5．反三角函数 $y=\arcsin x$（$-1\leqslant x\leqslant 1$），$y=\arccos x$（$-1\leqslant x\leqslant 1$），$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$．

二、函数的几种特性

1．函数的单调性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，如果 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的．

例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，$(-\infty,0)$ 称为函数的单调减少区间，$(0,+\infty)$ 称为函数的单调增加区间，它们统称为函数 $y=x^2$ 的单调区间．

单调增加函数的图形沿着 x 轴的正向而上升，单调减少函数的图形沿着 x

轴的正向而下降.

注意 证明函数单调的方法一般可用“作差法”或“作商法”.

“作差法”就是在定义域内任取$x_1 < x_2$，证明

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \text{ 或 } f(x_1) - f(x_2) > 0 .$$

“作商法”就是在定义域内任取$x_1 < x_2$，证明

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} < 1 \text{ 或 } \frac{f(x_1)}{f(x_2)} > 1 , \quad f(x_2) \neq 0 .$$

2. 函数的奇偶性

定义 2 设函数$f(x)$的定义域I关于原点对称，若对任意$x \in I$，都有$f(-x) = -f(x)$，那么称函数$f(x)$为奇函数；若对任意$x \in I$，都有$f(-x) = f(x)$，那么称函数$f(x)$为偶函数．既不是奇函数，又不是偶函数的函数称为非奇非偶函数.

例如，$y = \sin x$、$y = x^3 - x$是奇函数，$y = \cos x$、$y = x^4 + x^2$是偶函数，$y = 2^x$、$y = \arccos x$既不是奇函数，也不是偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于y轴对称.

特别地，函数$y = 0$既是奇函数也是偶函数.

3. 函数的周期性

定义 3 设函数$f(x)$的定义域为I，如果存在一个不为零的常数l，对任意$x \in I$，有$x + l \in I$，且使$f(x + l) = f(x)$恒成立，那么称函数$f(x)$为周期函数，满足上式的最小正数l称为函数$f(x)$的最小正周期.

通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期，并且用T表示.

例如，由于$\sin(x + 2\pi) = \sin x$，所以$\sin x$的周期是$T = 2\pi$.

一个以l为周期的周期函数，在定义域内每个长度为l的区间上，函数图像有相同的形状.

注意 有的周期函数有无穷多个周期，但它没有最小正周期，如常数函数$y = C$.

4. 函数的有界性

定义 4 设函数$y = f(x)$在区间I上有定义，如果存在正数M，使得对于区间I上的任何x值，有$|f(x)| \leqslant M$，则称函数$f(x)$在区间I上为有界函数；否则称函数$f(x)$在区间I上为无界函数.

有界函数的图像介于两条平行直线$y = \pm M$之间．例如，$y = \arctan x$是有界函数，其图像介于$y = \pm\frac{\pi}{2}$两平行直线之间，而$y = \log_2 x$是一个无界函数.

三、反函数

设函数 $y=f(x)$，如果把 y 当作自变量，x 当作函数，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫做直接函数.

由于习惯上采用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数，因此，往往把函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$.

若在同一坐标平面上作出直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形，则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称. 例如，函数 $y=a^x$ 和它的反函数 $y=\log_a x$ 的图形就关于直线 $y=x$ 对称，如图 2-1 所示.

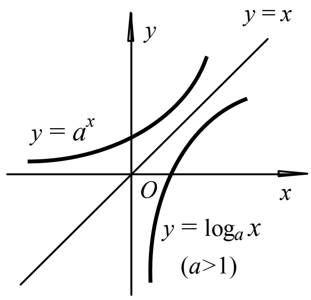

图 2-1

如果自变量取定值时，对应的函数值是唯一的，称这样的函数为单值函数，例如 $y=\cos x$ 是单值函数；如果自变量取定值时，对应的函数值有两个或两个以上，则称这样的函数为多值函数，例如 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 是多值函数. 以后如果没有特别说明，指的都是单值函数.

注意 （1）直接函数与其反函数互称为反函数;
（2）只有单调函数才具有反函数;
（3）求反函数时要注明其定义域.

四、复合函数

在实际问题中，常会遇到由几个较简单的函数组合而成较复杂的函数. 例如，由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 可以组合成 $y=\sin^2 x$ ；又如，由函数 $y=\ln u$ 和 $u=\mathrm{e}^x$ 可以组合成 $y=\ln\mathrm{e}^x$ ，这种组合称为函数的复合.

定义 5 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$ ，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$ ，并且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 构成 x 的函数称

为 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

值得注意的是，不是任何两个函数都可以复合成一个函数，如 $y=\arccos u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数，因为对于 $u=2+x^2$ 中的任何 u 值，都不能使 $y=\arccos u$ 有意义. 另外，复合函数也可以由两个以上的函数复合成一个函数，如 $y=\ln u$ 、 $u=\sin v$ 及 $v=\sqrt{x}$ 可以复合成函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$.

正确分析复合函数的构成是相当重要的，它在很大程度上决定了以后是否能熟练掌握微积分的方法和技巧. 分解复合函数的方法是将复合函数分解成基本初等函数或基本初等函数之间（或与常数）的和、差、积、商.

例 1　指出下列复合函数的复合过程：

（1） $y=\mathrm{e}^{\sin x}$；　　（2） $y=\ln\cos x^2$；

（3） $y=\cos^2(3x+1)$；　　（4） $y=a^{\ln\sqrt{1+2x}}$.

解　（1） $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$， $u=\sin x$ 复合而成的；

（2） $y=\ln\cos x^2$ 是由 $y=\ln u$， $u=\cos v$， $v=x^2$ 复合而成的；

（3） $y=\cos^2(3x+1)$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=3x+1$ 复合而成的；

（4） $y=a^{\ln\sqrt{1+2x}}$ 是由 $y=a^u$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{t}$，$t=1+2x$ 复合而成的.

例 2　将下列各题中的 y 表示为 x 的函数：

（1） $y=\cos u$，$u=3^x$；　　（2） $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=2x$；

解　（1） $y=\cos 3^x$；　　（2） $y=\ln\sin 2x$.

五、初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或有限次的复合所构成的，并能用一个式子表示的函数叫做初等函数.

例如， $y=\arccos\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$ ， $y=x\ln\mathrm{e}^x-3x+2$ ， $y=\tan^3\dfrac{x^2+3}{2}$ 等都是初等函数. 在本书中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

注意　分段函数不一定是初等函数. 例如，分段函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0,\\ -1 & x<0\end{cases}$$

就不是初等函数，因为它不可以由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合得到. 但分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0,\\ -x & x<0\end{cases}$$

可以表示为 $f(x)=\sqrt{x^2}$，它可以看作 $f(x)=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数，因此它是初等函数.

六、常用的经济函数

在经济活动中，往往涉及到许多经济量，这些量之间存在着各种相关的关系，这些关系用数学模型进行描述，就形成了各种经济函数. 下面介绍经济学中常用的几种函数.

1. 需求函数

市场上消费者对某种商品的需求量除了与该商品的价格有关外，还与消费者的收入、待用商品的价格、消费者的人数等有关. 现在我们只考虑商品的需求量与价格的关系，而将其他各种量看作常量，这样，商品的需求量 Q 就是价格 p 的函数，称为需求函数. 记作

$$Q=Q(p).$$

一般来说，当商品的价格增加时，商品的需求量将会减少，因此，通常需求函数是单调减少函数.

常见的需求函数有：

线性需求函数　$Q=a-bp$（$a>0$，$b>0$；a，b 都是常数）；

二次曲线需求函数　$Q=a-bp-cp^2$（$a>0$，$b>0$，$c>0$；a，b，c 都是常数）；

指数需求函数　$Q=a\mathrm{e}^{-bp}$（$a>0$，$b>0$；a，b 都是常数）.

需求函数 $Q=Q(p)$ 的反函数就是价格函数，计作 $p=p(Q)$，反映商品的价格与需求的关系.

例 3　市场上某商品的需求量 Q 是价格 p 的线性函数. 当价格 p 为 50 元时，可售出 150 件；当价格 p 为 60 元时，可售出 120 件. 试求需求函数和价格函数.

解　设线性需求函数为 $Q=a-bp\ (a>0,\ b>0)$.

根据题意，需确定函数中的 a 和 b.

根据已知，当 $p=50$ 时，$Q=150$. 将其代入所设函数中，有 $150=a-50b$. 同理，有 $120=a-60b$. 这就得到一个方程组

$$\begin{cases}150=a-50b,\\120=a-60b\end{cases}$$

解得 $a=300$，$b=3$. 于是所求的需求函数为 $Q=300-3p$.

由上式解出 p，即得价格函数 $p=100-\dfrac{Q}{3}$.

2. 供给函数

市场上影响供给量的主要因素也是商品的价格，因此，商品的供给量 Q 也价格的函数，称为供给函数，记作

$$Q=Q(p).$$

一般地，商品的供给量随价格的上涨而增加，随价格的下降而减少，因此，供给函数是单调增加函数：

常见的供给函数有：$Q=ap-b$（$a>0$，$b>0$；a，b 都是常数）；

$$Q=\frac{ap+b}{mp+n}\ (a>0,\ b>0,\ m>0,\ an>bm).$$

例 4 市场上某商品的售价为每件 70 元时，生产厂商可以提供 4 万件商品；当每件价格增加 2 元时，生产厂商可以多提供 0.06 万件商品，试求：（1）该商品的线性供给函数；（2）当市场售价为 80 元时，厂商供应量是多少？

解 （1）由题意知

$$Q=4+\frac{0.06}{2}\times(p-70)=0.03p+1.9;$$

（2）当 $p=80$ 元时，厂商供应量是

$$Q=0.03\times 80+1.9=4.3\ （万件）.$$

3. 市场均衡

对一种商品而言，如果需求量等于供给量，则这种商品就达到了市场均衡．假设 Q_d ,Q_s 分别表示需求函数和供给函数，以线性需求函数和线性供给函数为例，令

$$Q_d=Q_s,\quad a-bp=cp-d,\quad p=\frac{a+d}{b+c}=p_0.$$

这个价格 p_0 称为该商品的**市场均衡价格**．而 $Q_d=Q_s=Q_0$ 称为该商品的**市场均衡数量**.

例 5 已知某商品的供给函数和需求函数分别是 $Q_d=25p-10$ 和 $Q_s=200-5p$，求该商品的市场均衡价格和市场均衡数量.

解 由均衡条件 $Q_d=Q_\mathrm{S}$，得

$$25p-10=200-5p,\ 30p=210,\ p=7.$$

从而

$$Q_0=25p-10=165.$$

即市场均衡价格为 7，市场均衡数量为 165.

4. 成本函数、收入函数与利润函数

产品成本是指以货币形式表现的企业生产和销售产品的全部费用支出，产品成本可分为固定成本和可变成本两部分. 成本函数表示费用总额与产量（或销售量）之间的相互关系，**固定成本**（常用C_1表示）是尚未生产产品时的支出，在一定限度内是不随产量变动的费用. 如厂房费用、机器折旧费用、一般管理费用、管理人员工资等. **可变成本**（常用C_2表示）是随产品变动而变动的费用，如原材料、燃料和动力费用、生产工人的工资等.

以x表示产量，C表示总成本，则C与x之间的函数关系称为总成本函数，记作

$$C = C(x) = C_1 + C_2 \quad（x \geqslant 0）.$$

平均成本是平均每个单位产品的成本，平均成本记作

$$\overline{C(x)} = \frac{C(x)}{x} \quad（x > 0）.$$

销售某产品的收入R等于产品的单位价格p与销售量x的乘积，即

$$R = px .$$

称其为**收入函数**.

而销售利润L等于收入R减去成本C，即

$$L = R - C .$$

称其为**利润函数**.

当$L = R - C > 0$时生产者盈利；

当$L = R - C < 0$时生产者亏本；

当$L = R - C = 0$时生产者盈亏平衡，使$L(x) = 0$的点x_0称为盈亏平衡点（也叫保本点）.

例 6 某电器公司生产一种新产品，根据市场调查得出需求函数为

$$Q(P) = -900p + 45000 .$$

该公司生产该产品的固定成本是 270000 元，而单位的可变成本是 10 元，为获得最大利润，出厂价格应为多少？

解 以Q表示产量，C表示成本，p表示价格，则有

$$C(Q) = 10Q + 270000 ,$$

而需求函数为 $Q = -900p + 45000$，

代入得 $C(p) = -9000p + 720000$.

收入函数为

$$R(p) = pQ = p(-900p + 45000) = -900p^2 + 45000p ,$$

利润函数为

$$L(p)=R(p)-C(p)=(-900p^2+45000p)-(-9000p+720000).$$
$$=-900(p-30)^2+90000.$$

由于利润函数是一个二次函数，容易求得，当价格 p=30 元时，利润 L=90000 元为最大利润，在此价格下，可望销售量为

$$Q=-900\times 30+45000=18000 \text{（单位）}.$$

习题 2-1

扫码查答案

1．求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{2x}{x^2-x}$；（2）$y=\lg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；

（3）$y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}+\sqrt{x-1}$；（4）$y=\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{\ln(2+x)}$．

2．判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=2x^2-5\cos x$；（2）$f(x)=x+\sin x+\mathrm{e}^x$；

（3）$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$；（4）$f(x)=\tan x+\cos x$．

3．下列函数哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

（1）$y=\sin^2 x$；（2）$y=3\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$；

（3）$y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$；（4）$y=x\sin x$．

4．求下列函数的反函数：

（1）$y=\sqrt[3]{2x-1}$；（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3）$y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$；（4）$y=\sqrt{1-x^3}$．

5．指出下列函数的复合过程：

（1）$y=\sqrt[3]{2x-1}$；（2）$y=\mathrm{e}^{\sqrt{x-2}}$；

（3）$y=\arccos(1-x^2)$；（4）$y=\sin\mathrm{e}^{-x}$；

（5）$y=\ln(3x^2+2)$；（6）$y=\ln\ln\ln^4 x$．

6．写出下列函数的复合函数：

（1）$y=u^3$，$u=\cos v$，$v=x+2$；（2）$y=\sqrt{u}$，$u=\cos x$．

7．设某商品的需求关系是$2Q+p=40$，其中Q是商品量，p是该商品的价格，求销售10件时的总收入．

8．某厂生产车床，总成本函数为$C(q)=900+20q+q^2$（千元），求当生产200个该产品时的总成本和平均成本．

§2-2　函数的极限

一、数列的极限

在中学已经学习过数列和数列的极限，它的定义是：

定义 6　按一定顺序排列的一列数，叫做数列．组成数列的每个数叫做这个数列的项，第一个数叫数列的第一项，记作a_1；第二个数叫数列的第二项，记作a_2；…；第n个数叫数列的第n项，也叫通项，记作a_n．数列一般可以写成形式

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

并记作$\{a_n\}$，有时也简记为a_n．

如：
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}, \cdots$$

可记作$\left\{\frac{1}{n}\right\}$．

定义 7　如果当n无限增大时，数列$\{a_n\}$无限接近于一个确定的常数A，则称常数A是数列$\{a_n\}$的极限，或称数列$\{a_n\}$收敛于A，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \to A(n\to\infty).$$

例如，当$n\to\infty$时，数列$\left\{\frac{2n+(-1)^{n+1}}{n}\right\}$的极限是2，可记作

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^{n+1}}{n}=2 \text{ 或 } \frac{2n+(-1)^{n+1}}{n}\to 2\ (n\to\infty).$$

注意　1．在数列极限中数项n都是趋于正无穷大;

2．只有无穷数列才可能存在极限.

例 1　观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限：

（1）$a_n=\frac{1}{n}$；　　（2）$a_n=3-\frac{1}{n^3}$；

（3）$a_n=(-\frac{1}{3})^n$；　　（4）$a_n=100$．

解 计算出数列的前几项，考查当$n\to\infty$时数列的变化趋势如下表：

n	1	2	3	4	…	∞
（1）$a_n=\frac{1}{n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	…	0
（2）$a_n=3-\frac{1}{n^3}$	$3-\frac{1}{1}$	$3-\frac{1}{8}$	$3-\frac{1}{27}$	$3-\frac{1}{64}$	…	3
（3）$a_n=(-\frac{1}{3})^n$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	…	0
（4）$a_n=100$	100	100	100	100	…	100

可以看出，它们的极限分别是：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n^3}\right)=3$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}100=100$．

二、函数的极限

我们在研究函数时，常常需要研究在自变量的某个变化过程中，对应的函数值是否无限地接近某个确定的常数．如果存在这样的常数，则称此常数为函数在自变量的这个变化过程中的极限．由于自变量的变化过程不同，函数极限概念也就表现为不同的形式．

1．当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

我们先列表考查函数$f(x)=\frac{2}{x}$当$x\to\infty$时的变化趋势：

x	± 10000	± 1000000	± 100000000	± 1000000000	$\to\infty$
$\frac{2}{x}$	± 0．0002	± 0．000002	± 0．00000002	± 0．000000002	$\to 0$

由上表可知：当$x\to\infty$时，$f(x)=\frac{2}{x}$的值无限接近于零，即当$x\to\infty$时，$f(x)\to 0$．如图2-2所示，这种变化趋势是明显的，即当$x\to\infty$时，函数$f(x)=\frac{2}{x}$的图像无限接近于x轴．

为此有如下的定义：

定义 8 如果当 x 的绝对值无限增大（即 $x\to\infty$ ）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{，或当 } x\to\infty \text{ 时，} f(x)\to A .$$

由定义知，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限是 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

在上述定义中，自变量 x 的绝对值无限增大指的是既取正值无限增大（记为 $x\to+\infty$ ），同时也取负值而绝对值无限增大（记为 $x\to-\infty$ ）. 但有时自变量的变化趋势只能或只需取这两种变化的一种情形，为此有下面的定义：

定义 9 如果当 $x\to+\infty$ (或 $x\to-\infty$ ）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ （或 $x\to-\infty$ ）时的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A \text{，或当 } x\to+\infty\ (x\to-\infty) \text{ 时，} f(x)\to A .$$

例如，由图 2-2 知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \quad \text{及} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0 \text{，}$$

这两个极限与 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$ 相等，都是 0.

又如，由图 2-3 知

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2} \quad \text{及} \quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2} \text{，}$$

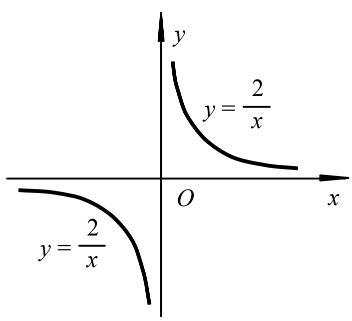

图 2-2

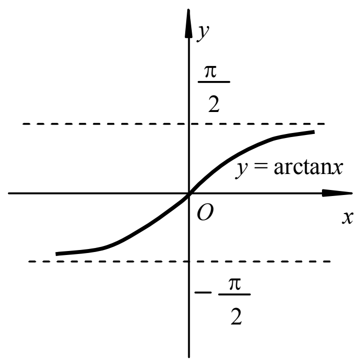

图 2-3

由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\arctan x$ 不是无限接近于同一个确定的常数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

由上面的讨论，我们得出下面的定理：

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

证明从略.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}$.

解 由图 2-4 可知，$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}=0$.

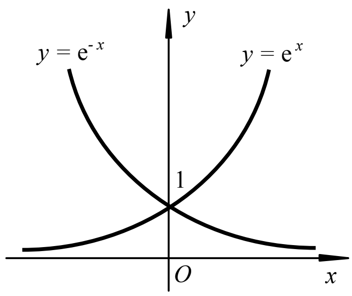

图 2-4

例 3 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的极限.

解 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi .$$

这两个极限存在但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限

先列表考查函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}+5$ 当 $x\to 2$ 时的变化趋势：

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	…	$\to 2$
$f(x)$	6.05	6.005	6.0005	6.00005	…	$\to 6$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	…	$\to 2$
$f(x)$	5.95	5.995	5.9995	5.99995	…	$\to 6$

由上表可知，当 $x\to 2$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{2}+5$ 的值无限地接近于 6，如图 2-5 所示，这种变化趋势是明显的，当 $x\to 2$ 时，直线上的点沿着直线从两个方向逼

近点(2,6).

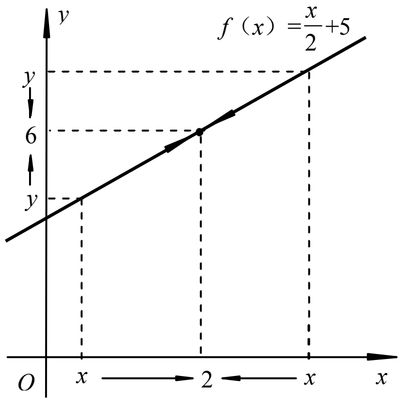

图 2-5

定义 10　如果当 x 无限接近于定值 x_0，即 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad 当 x\to x_0 时，f(x)\to A.$$

由定义知，当 $x\to 2$ 时，$f(x)=\frac{x}{2}+5$ 的极限是 6，即

$$\lim_{x\to 2}(\frac{x}{2}+5)=6.$$

例 4　考查极限 $\lim\limits_{x\to x_0} C$（C 为常数）和 $\lim\limits_{x\to x_0} x$.

解　因为当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的值恒为 C，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} C=C.$$

因为当 $x\to x_0$ 时，$\varphi(x)=x$ 的值无限接近于 x_0，所以

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0} x=x_0.$$

3. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的左、右极限

因为 $x\to x_0$ 有左右两种趋势，而当 x 仅从某一侧趋于 x_0 时，只需讨论函数的单边趋势，于是有下面的定义：

定义 11　如果当 x 从 x_0 左侧无限接近 x_0（记为 $x\to x_0-0$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

如果当 x 从 x_0 右侧无限接近 x_0（记为 $x\to x_0+0$）时，函数 $f(x)$ 无限接近

于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0+0) = A \quad 或 \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A .$$

由函数 $f(x) = \dfrac{x}{2} + 5$ 当 $x \to 2$ 时的变化趋势可知：

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (\frac{x}{2} + 5) = 6 ,$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (\frac{x}{2} + 5) = 6 ,$$

这时 $f(2-0) = f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2} (\dfrac{x}{2} + 5) = 6$.

由上面的讨论，我们得出下面的定理：

定理 2　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

证明从略.

例 5　讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

当 $x \to 0$ 时的极限.

解　观察图 2-6 可知：

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (x-1) = -1 ,$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x+1) = 1 .$$

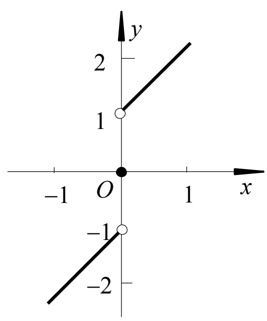

图 2-6

因此，当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的左右极限存在但不相等，所以极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

例 6　考查数列 $x_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$ 当 $n \to \infty$ 时的变化趋势，并写出其极限.

解　因为当 $n \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{10^n} \to 0$，$1 - \dfrac{1}{10^n} \to 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{10^n}) = 1 .$$

数列极限是函数极限的特例. 从函数的观点来看，数列 $x_n = f(n)$ 的极限为 A 就是：当自变量 n 取正整数无限增大时，对应的函数值 $f(n)$ 无限地接近于确定的常数 A .

习题 2-2

扫码查答案

1．观察并写出下列极限值：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3+1}$；　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{10})^x$；

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$；　（4）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}$；　（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n+1}$；

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x}$；　（8）$\lim\limits_{x\to1}\arctan x$.

2．讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<1; \\ 1, & x=1; \\ -1, & x>1 \end{cases}$ 当 $x \to 1$ 时的极限.

3．讨论函数 $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ 当 $x \to -1$ 时的极限.

4．设函数 $f(x) = \begin{cases} a+\sin x， & x>0 \\ 1+x^2, & x<0 \end{cases}$，且极限 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 存在，求 a 的值.

§2-3　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

在实际问题中，我们经常遇到极限为零的变量. 例如，单摆离开铅直位置

而摆动，由于空气阻力和机械摩擦力的作用，它的振幅随着时间的增加而逐渐减小并趋于零．又如，电容器放电时，其电压随着时间的增加而逐渐减小并趋于零．对于这样的变量，我们称之为无穷小量，简称为无穷小．

1．无穷小量的定义

定义 12 如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么函数 $f(x)$ 叫做当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量，简称为无穷小．

例如，因为 $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 是当 $x \to 1$ 时的无穷小；

又如，因为 $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小．

但是当 $\lim\limits_{x \to 0}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$ 都不是无穷小．

注意 （1）判断函数 $f(x)$ 是否为无穷小，必须指明自变量的变化趋势；

（2）无穷小量是一个极限为零的函数，而不是一个绝对值很小的数；

（3）常数中只有“0”可以看成是无穷小，因为 $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ (x \to x_0)}} 0=0$．

2．无穷小的性质

无穷小量还有以下性质：

性质 1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小；

注意 此性质特别强调“有限个”，因为无限个无穷小之和可能不是无穷小．

例如，当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，但下式

$$\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}}_{x\text{个}}$$

的值并不是无穷小，而是 1．

性质 2 有限个无穷小的乘积仍是无穷小．

性质 3 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小．

推论：常数与无穷小的乘积是无穷小．

证明从略．

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \sin\dfrac{1}{x}$．

解 因为 x^3 是当 $x \to 0$ 时的无穷小，而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是一个有界函数，所以

$\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

3．函数极限与无穷小量的关系

定理 3 在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）中，具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和；反之，如果函数可表示为常数与无穷小之和，那么该常数就是这个函数的极限.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，令 $\alpha = f(x) - A$，则

$$\lim_{x\to x_0} \alpha = \lim_{x\to x_0}[f(x) - A] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} A = 0 .$$

这说明 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小．由于 $\alpha = f(x) - A$，所以 $f(x) = A + \alpha$.

请同学们证明第二部分.

二、无穷大量

1．无穷大量的定义

定义 13 如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么函数 $f(x)$ 叫做当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大量，简称为无穷大.

例如，当 $x \to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是一个无穷大；又如，当 $x \to \infty$ 时，$x^2 - 1$ 是一个无穷大.

注意 （1）无穷大是一个函数，而不是一个绝对值很大的常数；

（2）判断一个函数是否为无穷大，必须指明自变量的变化趋势.

2．无穷大与无穷小的关系

无穷大与无穷小有以下的简单关系：

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

利用这个关系，可以求一些函数的极限.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1} = 0$，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1} = \infty .$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2-1}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{x^2-1}=\infty.$$

事实上，当 n，m 是非负整数时，对于有理分式函数的极限，有下面的结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & \text{当 } n=m \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } n<m \text{ 时；}\\ \infty, & \text{当 } n>m \text{ 时.}\end{cases}$$

三、无穷小的比较

我们已经知道，两个无穷小的和、差及积仍然是无穷小．但是，关于两个无穷小的商，却会出现不同的情况，当 $x\to0$ 时 x、$3x$、x^2、$\sin x$ 都是无穷小，而

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{3}=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

两个无穷小之比的极限的各种不同情况，反映了不同的无穷小趋向零的快慢程度．例如，从下表可以看出，当 $x\to0$ 时，$x^2\to0$ 比 $3x\to0$ 要“快些”，反过来，$3x\to0$ 比 $x^2\to0$ 要“慢些”，而 $\sin x\to0$ 与 $3x\to0$“快慢相近”.

x	1	0.1	0.01	0.001	→	0
$3x$	3	0.3	0.03	0.003	→	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	→	0
$\sin x$	0.8415	0.0998	0.0099	0.000999	→	0

我们还可以发现，趋向零较快的无穷小(x^2)与趋向零较慢的无穷小($3x$)之商的极限为 0；趋向零较慢的无穷小($3x$)与趋向零较快的无穷小(x^2)之商的极限为∞；趋向零快慢相近的两个无穷小（$\sin x$ 与 $3x$）之商的极限为常数（不为零）.

下面就以两个无穷小之商的极限所出现的各种情况来说明两个无穷小的比较.

定义 14 设α和β都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，又$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$也是在这个变化过程中的极限.

（1）如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$；

（2）如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

（3）如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小，特殊地，若$C=1$，则说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

注意 在无穷小的比较中，自变量的变化趋势必需一致，否则无法比较.

例如，在$x\to 0$时，x^2是比$3x$高阶的无穷小；$3x$是比x^2低阶的无穷小，$\sin x$与$3x$是同阶无穷小，$\sin x$与x是等价无穷小.

当$x\to 0$时，常用的等价无穷小有：

$\sin x\sim x$；	$\tan x\sim x$；
$\arcsin x\sim x$；	$\arctan x\sim x$；
$\ln(1+x)\sim x$；	$\mathrm{e}^x-1\sim x$；
$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$；	$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

例 4 比较当$x\to 0$时，无穷小$\dfrac{1}{1-x}-1-x$与x^2阶数的高低.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1-x}-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+x)(1-x)}{x^2(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(1-x)}=1$，

所以 $$\frac{1}{1-x}-1-x\sim x^2.$$

利用等价无穷小求极限有时要用到下面的定理：

定理 4 如果$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，那么
$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

这是因为$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$，这个性质表明，求两个无穷小之比的极限，分子与分母都可用等价无穷小来代替. 因此，如果用来代替的无穷小选得适当的话，可以使计算简化.

注意 用等价无穷小相互代替时必需是整个分子或整个分母用一个等价

无穷小进行代替，或是将分子、分母分解因式后用一个无穷小来代替其中的一个因式，切不可用等价无穷小分别代替代数和中的各项.

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan2x}{\sin5x}$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

解 当 $x\to0$ 时，$\tan2x\sim2x$ ，$\sin5x\sim5x$ ，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5};$$

当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$ ，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3+3x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}.$$

习题 2-3

扫码查答案

1．下列函数在自变量怎样变化时是无穷小？无穷大？

（1）$y=e^x$；（2）$y=\dfrac{1}{x+1}$；

（3）$y=\tan x$；（4）$y=\ln(x+2)$.

2．求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\sin2x\cdot\tan3x$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+3}{x-1}$；（4）$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$；（6）$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-3x+1}{x^2+7x-2}$；（8）$\lim\limits_{x\to0}x\sin x\cos\dfrac{1}{x}$；

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x\right)$；（10）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

3．当 $x\to0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？

4．当 $x\to1$ 时，无穷小 $1-x$ 与

（1）$1-x^3$；（2）$\dfrac{1}{2}(1-x^2)$

是否同阶？是否等价？

5．证明：当 $x\to0$ 时，无穷小 $1-\cos x$ 与无穷小 $\dfrac{x^2}{2}$ 等价.

6．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$ $(m,n\in\mathbf{N})$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$（提示：利用 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$）；

（5）$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\tan x}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to \mathrm{e}}\dfrac{\ln x-1}{x-\mathrm{e}}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$ （m，$n\in\mathbf{N}$）；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x}$．

§2-4　极限的运算法则

根据极限的定义用观察的方法来得到极限，只有特别简单的情况下才有可能．本节将介绍极限的四则运算法则，利用这些法则可以计算一些较为复杂的函数的极限．

定理 5　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，那么

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$（$C$ 是常数）；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$；

（4）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$　$(B\neq 0)$．

证明从略．

上述法则对于 $x\to\infty$ 时情形也是成立的，而且法则（1）和（3）可以推广到有限个具有极限的函数的情形．

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$．

解 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{2}+1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{2}+\lim\limits_{x\to 1}1=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}x+1$

$$=\frac{1}{2}\times 1+1=\frac{3}{2}.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}3=3+3=6.$

注意 在求极限时，有时分子分母的极限都是零，当分子分母都是多项式时，可将其进行因式分解，约去极限为零的因式后再按法则求其极限.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-1}{5x^3+x+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-1}{5x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{2-0-0}{5+0+0}=\frac{2}{5}.$$

注意 在求极限时，有时分子分母的极限都是无穷大，当分子分母都是多项式时，可将分子分母同时约去自变量的最高次幂后，再按法则求其极限.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3+x^2-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3+x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$

习题 2-4

扫码查答案

1．计算下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+5x+1)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}\left(1-\frac{1}{2x-1}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$；（4）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$．

2．计算下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-5x+3}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^3+x+7}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$；（4）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)^5}{(2x+1)^4(1-x)}$；（6）$\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{1}{h(x+h)}-\dfrac{1}{hx}]$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$；（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$．

§2-5　两个重要极限

本节将利用极限存在的两个准则得到两个重要极限.

一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

准则 1　如果

（1）在点 x_0 的近旁，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，

那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且等于 A.

下面我们利用准则 1 证明一个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 .$$

证　在图 2-7 所示的单位圆中，设圆心角 $\angle AOD=x$（$0<x<\dfrac{\pi}{2}$），那么显然有

$$\sin x=CD，\quad x=\overset{\frown}{AD}，\quad \tan x=AB，$$

因为

$\triangle AOD$ 的面积＜扇形 AOD 的面积<$\triangle AOB$ 的面积，

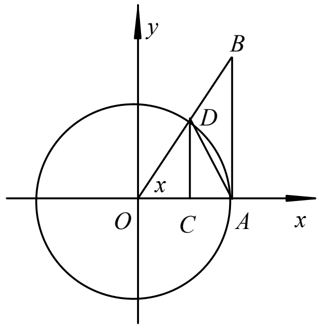

图 2-7

即 $$\frac{1}{2}|OA||CD| < \frac{1}{2}x|OA|^2 < \frac{1}{2}|OA||AB|.$$

$$\sin x < x < \tan x,$$

除以 $\sin x$，得：

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ 或 } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

因为用 $-x$ 代替 x 时，$\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 都不变，所以当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时，上述不等式仍然成立.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$，$\lim\limits_{x\to 0}1 = 1$，故由准则 1 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

利用上述极限求有关函数的极限时要注意：

（1）自变量必需是趋于 0；

（2）式中所有 x 的系数必需一致；

（3）式中的 x 也可以是函数.

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$，

设 $t = 2x$，当 $x \to 0$ 时，$t \to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 2\times 1 = 2.$$

此极限也可以利用二倍角公式将其展开来求，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos x=2.$$

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解　
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}.$$

二、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

准则 2　单调有界数列必有极限.

证明从略.

利用准则 2，可以证明另一个重要极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

这个 e 是无理数，它的值是 $\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots$.

作代换 $z=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$z\to 0$，于是上述极限又可写成

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}.$$

利用上面的极限求有关函数的极限时要注意：

（1）括号中的第一项必需化为 1；

（2）括号内第一项与第二项之间必需用“+”号连接；

（3）括号中的第二项与括号外的指数必需互为倒数；

（4）极限中的 x 也可以是函数.

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解 令 $t=-x$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，从而

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $t=2x$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{2}=\mathrm{e}^{2}.$$

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-2}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

习题 2-5

扫码查答案

求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}}{\sin^{2}\dfrac{x}{3}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}2^{x}\sin\dfrac{1}{2^{x}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{3\tan x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

§2-6 初等函数的连续性

自然界中有许多现象，如气温的变化、河水的流动、植物的生长等等，都

是在连续地变化着．这种现象在函数关系上的反映，就是函数的连续性．下面我们先引入增量的概念，然后运用极限来定义函数的连续性．

一、函数的增量

设变量 x 从它的初值 x_1 变到终值 x_2，则终值与初值的差叫做自变量 x 的增量，记为 Δx，即

$$\Delta x = x_2 - x_1 .$$

假定函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，此时称 $f(x_0+\Delta x)$ 与 $f(x_0)$ 的差为函数的增量，记为 Δy，即

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) .$$

这个关系式的几何解析如图 2-8 所示．

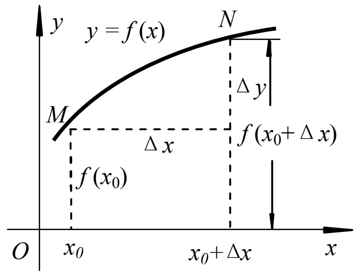

图 2-8

注意　增量可以是正值，也可以是负值，还可以是零．

二、函数连续性的概念

1．函数在一点处的连续性

定义 15　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的近旁有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$ 趋于零时，对应的函数的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 也趋于零，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续，用极限来表示，就是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

或

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0 .$$

上述定义也可改用另一种方式来叙述：

设 $x = x_0 + \Delta x$，则 $\Delta x \to 0$，就是 $x \to x_0$；$\Delta y \to 0$，就是 $f(x) \to f(x_0)$，因此（2-1）式就是

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) .$$

所以，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续又可叙述如下：

定义 16 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) , \tag{2-2}$$

那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

2. 函数的间断点

设点 x_0 的任何邻域内总存在异于 x_0 而属于函数 $f(x)$ 的定义域的点．如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

（1）在 $x = x_0$ 没有定义；

（2）虽在 $x = x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）虽在 $x = x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，

那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**不连续点或间断点**.

注意 函数在点 x_0 连续必需满足三个条件:

（1）在点 x_0 处有定义;

（2）在点 x_0 处的极限存在;

（3）在点 x_0 处的极限值等于这点的函数值.

而当上述三个条件有任意一条不满足时即为函数在这点间断.

例 1 求函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的间断点.

解 由于函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处没有定义，故 $x = 1$ 是函数的一个间断点，如图 2-9 所示.

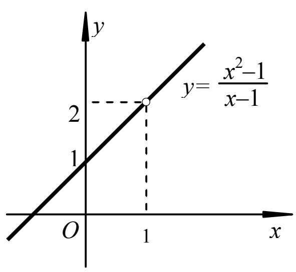

图 2-9

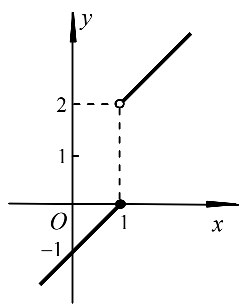

图 2-10

例 2 求函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>1; \\ 0, & x=1; \\ x-1, & x<1 \end{cases}$ 的间断点.

解 分界点 $x=1$ 虽在函数的定义域内，但

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x-1)=0,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)\neq \lim_{x\to 1-0} f(x),$$

即极限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在，故 $x=1$ 是函数的一个间断点，如图 2-10 所示.

例 3 求函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1; \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

的间断点.

解 函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处有定义，且

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,$$

但

$$f(1)=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个间断点，如图 2-11 所示.

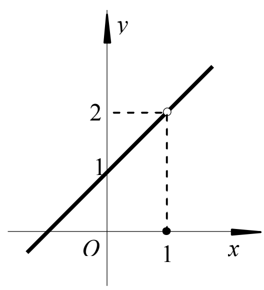

图 2-11

3. 函数在区间上的连续性

下面先说明函数的左连续与右连续的概念：

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 内有定义，如果左极限 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ 存在且等于 $f(b)$，即

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b),$$

那么称函数 $f(x)$ 在点 b 左连续.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 内有定义，如果右极限 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 存在且等于 $f(a)$，即

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a),$$

那么称函数 $f(x)$ 在点 a 右连续.

在区间 (a,b) 内每一点都连续的函数叫做该区间内的连续函数．如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(x)$ 在右端点 b 左连续，在左端点 a 右连续，即

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = f(b), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a),$$

那么称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

例 4　讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \geqslant 1; \\ 2-x, & x < 1 \end{cases}$$

在点 $x=1$ 的连续性.

解　函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (1+x) = 2,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (2-x) = 1,$$

左、右极限存在但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在，即函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续.

注意　求分段函数的极限时，函数的表达式必需与自变量所在的范围相对应.

三、初等函数的连续性

1．连续函数的运算

定理 6　有限个连续函数的和仍是连续函数.

定理 7　有限个连续函数的乘积仍是连续函数.

定理 8　两个连续函数之商（假定除式不为零）仍是连续函数.

定理 9　函数 $x=\varphi(y)$ 与它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间内有相同的单调性.

例如，因为函数 $y=2^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单值、单调增加且连续，所以其反函数 $y=\log_2 x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单值、单调增加且连续.

定理 10　两个连续函数复合而成的复合函数仍是连续函数.

例如，因为 $u=2x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处连续，$y=\sin u$ 在 $u=\dfrac{\pi}{2}$ 处连续，所以 $y=\sin 2x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处连续.

定理 10 说明了复合函数的连续性，也提供了求初等函数极限的一种方法：

如果函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 处有极限，且函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，且 $u_0=g(x_0)$，那么

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(g(x_0))=f(\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

也就是说，极限号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 可以与函数符号 f 互换顺序.

2. *初等函数的连续性*

不难证明，基本初等函数在各自定义域内连续，再由连续函数的运算，我们得到下面的定理：

定理 11　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

初等函数的连续区间就是它的定义区间，分段函数在每一个分段区间内都是连续的，分段点可能是连续点也可能是它的间断点，需用定义考查.

连续函数的图像是一条连续不间断的曲线.

上述初等函数连续性的结论提供了求初等函数极限的一个方法：

如果 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 是其定义区间内的点，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续，因此有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

例如，$x_0=\dfrac{\pi}{2}$ 是初等函数 $\ln\sin x$ 的一个定义区间 $(0,\pi)$ 内的点，所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\sin x=\ln\sin\dfrac{\pi}{2}=0$.

四、闭区间上连续函数的性质

1. *最大值和最小值性质*

定理 12（最大值和最小值定理）　在闭区间上连续的函数一定有最大值与最小值.

这就是说，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，如图 2-12 所示，那么在 $[a,b]$ 上至少有一点 $\xi_1(a\leqslant\xi_1\leqslant b)$，使得 $f(\xi_1)$ 为最大，即

$$f(\xi_1)\geqslant f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b);$$

又至少有一点 $\xi_2(a \leqslant \xi_2 \leqslant b)$，使得 $f(\xi_2)$ 为最小，即

$$f(\xi_2) \leqslant f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

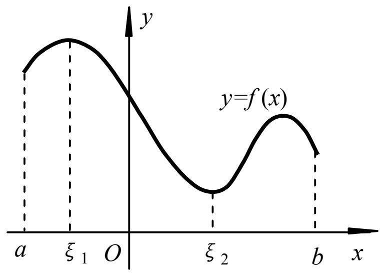

图 2-12

2. 介值性质

定理 13（介值定理） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在该区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 与 $f(b)=B$，如图 2-13 所示，那么不论 C 是 A 与 B 之间的怎样一个数，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C \qquad (a<\xi<b).$$

特别地，如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=0 \qquad (a<\xi<b).$$

如图 2-14 所示.

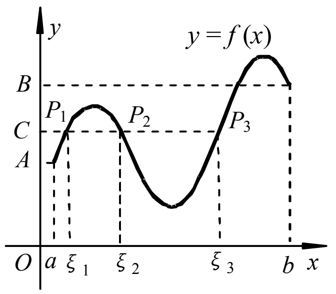

图 2-13

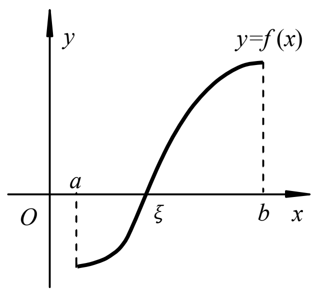

图 2-14

由这个定理可知，在闭区间上连续的函数必取得介于最大值与最小值之间的任何值.

例 5 证明方程 $x^5+3x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证 设 $f(x)=x^5+3x-1$，它在 $[0,1]$ 上是连续的，并且在区间端点的函数值为

$$f(0)=-1<0, \quad f(1)=3>0,$$

根据介值定理，可知在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ ，使得

$$f(\xi)=0\,,$$

即 $$\xi^5+3\xi-1=0 \qquad (0<\xi<1)\,,$$

这说明方程 $x^5+3x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根 ξ .

习题 2-6

扫码查答案

1．讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x+3, & x>1,\end{cases}$$

在 $x=\dfrac{1}{2}$ ， $x=1$ ， $x=2$ 各点的连续性.

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-x-2}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ ，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

3．求下列函数的间断点：

（1） $y=\dfrac{x}{x^3-1}$ ；（2） $y=\dfrac{3x}{x^2+5x-6}$ ；

（3） $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ ；（4） $y=\dfrac{\cot x}{x}$ ；

（5） $y=\dfrac{\sin x}{x^2-1}$ ；（6） $y=x\arctan\dfrac{1}{x-1}$.

4．求下列各极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$ ；（2） $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}$ ；

（3） $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{2\cos(\pi-x)}$ ；（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ；

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$ ；（6） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$ ；

（7） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ ；（8） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ ；

（9） $\lim\limits_{x\to 2}\arcsin(x-1)$ ；（10） $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{x+2}\right)$.

5．指出函数 $y=\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值与最小值.

6．指出函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $[2,4]$ 上的最大值与最小值.

7．证明方程 $x^5-3x-1=0$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个根.

8．证明三次方程 $2x^3-3x^2-3x+2=0$ 在区间 $(-2,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

9．设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)>g(a)$，$f(b)<g(b)$，证明方程 $f(x)=g(x)$ 在 (a,b) 内必有根.

本章小结

一、初等函数

1．基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

2．函数的几种特性：函数的单调性、函数的奇偶性、函数的周期性、函数的有界性.

3．复合函数.

二、函数的极限

函数极限的概念:

（1）当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的极限．记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

（2）当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

当 x 无限趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的极限．记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$.

三、无穷小与无穷大

1．无穷小的概念

极限为零的变量，称为无穷小量，简称无穷小.

2. 无穷小的性质

（1）有限个无穷小的代数和是无穷小；（2）有限个无穷小的乘积是无穷小；（3）有界函数与无穷小的积是无穷小.

3. 无穷大的概念

当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大量，简称无穷大.

4. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，若 $\lim f(x)=0$，则 $\lim \dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

5. 无穷小的比较

设 α 和 β 都是在自变量的同一变化过程中的无穷小，且 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}$ 是在这一变化过程中的极限，则

（1）如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 的高阶无穷小；

（2）如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 的低阶无穷小；

（3）如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=C$，则称 α 和 β 是同阶无穷小（其中 $C \neq 0$ 为常数）；

（4）如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 和 β 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

四、函数极限的四则运算

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$（自变量的变化趋势为 x_0 或 ∞），则

$\lim[f(x) \pm g(x)]=\lim f(x) \pm \lim g(x)=A \pm B$；

$\lim\left[f(x) \cdot g(x)\right]=\lim f(x) \cdot \lim g(x)=A \cdot B$；

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

五、两个重要极限

（1）极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$；

（2）极限 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

六、函数的连续性

1．设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，如果当自变量的增量趋于零时，函数的相应增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]=0\ .$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续；否则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断.

2．如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处满足：

（1） $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续．若三个条件中任一条不满足，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断.

测 试 题 二

一、判断题

1．若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2,$ 则 $f(0)=2$.　（　　）

2．如果 $f(x)$在点x_1处无定义，则 $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$ 必不存在.　（　　）

3． $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　（　　）

4． $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\infty$.　（　　）

5．函数 $f(x)=\ln(x+1)$的定义域是$x>0$.　（　　）

二、填空题

1．函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\cos(2x+1)}$ 的复合过程是__________.

2． $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$__________.

3． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=$__________.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{3x^3}=$__________.

5. 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=$__________.

三、选择题

1. 函数 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是（　　）.

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 不确定

2. 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处间断，那么（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在　　B. $f(x_0)$ 不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$　　D. 以上三种情况至少有一种发生

3. 当 $x\to 0$ 时，下列变量是无穷小的是（　　）.

A. $\sin x$　　B. $\ln(x+3)$

C. e^x　　D. x^3-1

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$ 的值是（　　）.

A. e^2　　B. $e^{\frac{1}{2}}$

C. $e^{-\frac{1}{2}}$　　D. e^{-2}

5. 下列极限存在的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x$

四、解答题

1. 指出下列函数的复合过程：

（1）$y=\sqrt{\arctan(x+1)}$；　　（2）$y=\tan^2\dfrac{x}{2}$.

2. 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$；　　　　（4）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan x}{x^2+1}$；　　　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2+2x}$.

3．讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0; \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

4．证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

5．某工厂生产计算机的日生产能力为 0 到 100 台，工厂维持生产的日固定费用为 4 万元，生产一台计算机的直接费用（含材料费和劳务费）是 4250 元．求该厂日生产 x 台计算机的总成本，并指出其定义域.

6．某工厂生产某产品的总成本函数为 $C(p)=p^3-9p^2+33p+10$，该产品的需求函数为 $Q=75-p$（p 为价格），求：（1）产量为 10 时的平均成本；（2）产量为 10 时的利润.

扫码查答案